嘉 南 學 報 第 三 十 八 期
第241~248頁，民國101 年
CHIA-NAN ANNUAL BULLETIN
VOL.38,PP.241-248,2012

# 四種瑕積分的冪級數解

余啓輝

南榮技術學院通識教育中心

## 摘要

本篇論文研究四種不同類型瑕積分的求解問題，我們利用高等微積分中兩個重要的方法－參數微分法和逐項積分法可以求出這四種瑕積分的冪級數解。同時我們舉出四個瑕積分的例子實際的來做計算，而這四個瑕積分的答案都是以無窮級數的型式呈現的。另一方面，我們利用數學軟體 Maple 計算這些瑕積分以及它們無窮級數解的近似值。

**關鍵詞：瑕積分、冪級數、參數微分法、逐項積分法、無窮級數**

*通訊作者: 南榮技術學院通識教育中心
Tel: +886-6-6523111Ext7525
Fax: +886-6-2585573
E-mail: chiihuei@mail.njtc.edu.tw

## 壹、前言

在高等微積分和工程數學的課程裡有關瑕積分(improper integral)問題的研究是一項重要的課題，例如Gamma函數和Beta函數以及其他一些特殊函數都是以瑕積分的型式呈現的，所以無論在物理、工程或是其他自然科學領域裡，有關瑕積分的求解或數值計算都有其重要性。這方面的書籍可以參閱 (賴漢卿，1979，第六章；Ghorpade et al., 2006, chap.9；Lang, 1983, chap.13；Ponnusamy, 2012, chap.7；Widder, 1961, chap.10)，相關的論文可以參考 (Baxa et al., 2002；Gray et al., 1992；Haber, 1975；余啓輝，2012e)。本篇文章主要是研究 $\int_0^{\infty}\frac{e^{cy}\cos(ay+b)}{(e^{cy}-x)^{k+1}}dy$ ， $\int_0^{\infty}\frac{e^{cy}\sin(ay+b)}{(e^{cy}-x)^{k+1}}dy$ ， $\int_0^{\infty}\frac{e^{cy}\cosh(ay+b)}{(e^{cy}-x)^{k+1}}dy$ 和 $\int_0^{\infty}\frac{e^{cy}\sinh(ay+b)}{(e^{cy}-x)^{k+1}}dy$ 這四種不同類型的瑕積分問題，其中 $a,b,c,x$ 為實數， $c>0$ 或 $c>|a|$， $|x|<1$ 且 $k$ 為任意正整數。我們利用高等微積分中兩個重要的方法－參數微分法 (differentiation with respect to a parameter) 和逐項積分法 (integration term by term)，可以將這四種類型瑕積分的解表示成 $x$ 的冪級數 (power series)，也就是本文四個主要的結果－定理1, 2, 3, 4。同時我們舉出四個瑕積分的例子實際的來做計算，利用這四個定理可以得到這四個瑕積分的無窮級數解(infinite series forms)，並且我們利用數學軟體Maple計算這些瑕積分以及它們無窮級數解的近似值。有關Maple在其他積分問題上的應用可以參考(余啓輝，2012a, 2012b, 2012c, 2012d )。

接著我們簡單的介紹本文所探討的四個瑕積分的例子，首先我們定義 $\binom{n}{p}=\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$，其中 $n,p$ 為任意正整數且 $1\le p\le n$ 而 $\binom{n}{0}=1$。例題 1 是求解有關餘弦

回目錄頁

函數的瑕積分 $\int_0^\infty \frac{e^{4y}\cos\left(3y+\frac{\pi}{4}\right)}{(2e^{4y}-1)^3}dy$ ，利用定理 1 可以得到它的無窮級數解為 $\frac{\sqrt{2}}{16}\cdot\sum_{n=0}^\infty \frac{(4n+5)\binom{n+2}{2}}{16(n+2)^2+9}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cong 0.032267$。其次例題 2 是求解關於正弦函數的瑕積分 $\int_0^\infty \frac{e^{3y}\sin\left(2y-\frac{\pi}{6}\right)}{\left(e^{3y}+\frac{1}{2}\right)^4}dy$ ，利用定理 2 我們很容易得到此瑕積分的無窮級數解為 $-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^\infty \frac{(3n+9-2\sqrt{3})\binom{n+3}{3}}{9(n+3)^2+4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cong -0.00726$ 。接著例題 3 是求解關於雙曲餘弦函數的瑕積分 $\int_0^\infty \frac{e^{5y}\cosh(3y+2)}{(e^{5y}-0.7)^5}dy$ ，由定理 3 得到它的解為 $\sum_{n=0}^\infty \frac{\binom{n+4}{4}\cdot[(5n+20)\cosh 2+3\sinh 2]}{25(n+4)^2-9}(0.7)^n \cong 24.5061$ 。最後例題 4 是研究有關雙曲正弦函數的瑕積分 $\int_0^\infty \frac{e^{\sqrt{3}y}\sinh(\sqrt{2}y-5)}{\left(e^{\sqrt{3}y}+\frac{3}{4}\right)^8}dy$ ，利用定理 4 我們得到此瑕積分的無窮級數解為

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\binom{n+7}{7}\cdot[-\sqrt{3}(n+7)\sinh 5+\sqrt{2}\cosh 5]}{3(n+7)^2-2}\left(-\frac{3}{4}\right)^n$$

$\cong -0.1023485$。

## 貳、主要的理論

接著我們介紹本文中用到的符號、公式和定理：

**符號：** 設複數 $z=a+ib$ ，其中 $a$ , $b$ 為實數，$i=\sqrt{-1}$。我們將 $z$ 的實部 $a$ 記作 $\mathrm{Re}(z)$ ，虛部 $b$ 記作 $\mathrm{Im}(z)$ 。

**尤拉公式** (Euler's formula)：假設 $\theta$ 為任意實數，$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ，其中 $i=\sqrt{-1}$ 。

接著介紹本文用到的高等微積分中兩個重要的定理，我們可以參考(Apostol, 1975, p283, p269)：

**參數微分法：** 假設 $I_1, I_2$ 皆為實數區間，若兩變數函數 $f(x,y)$ 以及它對 $y$ 的一階偏微分 $f_y(x,y)$ 定義在 $I_1\times I_2$ 且滿足以下條件：(i)對所有 $y\in I_2$ ，Lebesgue 積分 $\int_{I_1} f(x,y)dx$ 和 $\int_{I_1} f_y(x,y)dx$ 都存在，(ii)存在一個在區間 $I_1$ 的 Lebesgue 可積分函數 $G(x)$ 使得對所有 $(x,y)\in I_1\times I_2$ , $\left|f_y(x,y)\right|\le G(x)$ 。則 $F(y)=\int_{I_1} f(x,y)dx$ 在區間 $I_2$ 可微分且其微分 $\frac{d}{dy}F(y)=\int_{I_1} f_y(x,y)dx$ 。

**逐項積分法：** 令 $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ 為在區間 $I$ 的 Lebesgue 可積分函數序列使得 $\sum_{n=0}^\infty \int_I |g_n|$ 收斂，則 $\int_I \sum_{n=0}^\infty g_n = \sum_{n=0}^\infty \int_I g_n$ 。

在證明定理 1 之前我們需要以下的引理：

**引理 A：** 假設 $a,b,c$ 為實數, $c>0$ 且 $n$ 為正整數，瑕積分 $\int_0^\infty e^{-cny}\cos(ay+b)dy=\frac{cn\cos b-a\sin b}{c^2n^2+a^2}$ 。

**證明：** $\int_0^\infty e^{-cny}\cos(ay+b)dy$

$$=\int_0^\infty \mathrm{Re}\left(e^{(-cn+ia)y+ib}\right)dy \qquad \text{(利用尤拉公式)}$$

$$=\mathrm{Re}\left(\int_0^\infty e^{(-cn+ia)y+ib}dy\right)$$

$$=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{-cn+ia}e^{(-cn+ia)y+ib}\Big|_0^\infty\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{-cn-ia}{c^2n^2+a^2}\cdot e^{-cny}[\cos(ay+b)+i\sin(ay+b)]\Big|_0^\infty\right)$$

$$= \frac{cn\cos b - a\sin b}{c^2n^2+a^2} \qquad \blacksquare$$

以下定理 1 是將有關餘弦函數的瑕積分 $\int_0^\infty \frac{e^{cy}\cos(ay+b)}{(e^{cy}-x)^{k+1}}dy$ 表示成 $x$ 的冪級數：

**定理 1：** 設 $a,b,c,x$ 爲實數，$c>0$，$|x|<1$ 且 $k$ 爲任意正整數，則瑕積分 $\int_0^\infty \frac{e^{cy}\cos(ay+b)}{(e^{cy}-x)^{k+1}}dy$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{\binom{n+k}{k}\cdot[c(n+k)\cos b - a\sin b)]}{c^2(n+k)^2+a^2}x^n \text{ 。}$$

**證明：** 因爲 $\int_0^\infty \cos(ay+b)\cdot\left(\frac{x}{e^{cy}-x}\right)dy$

$$= \int_0^\infty \cos(ay+b)\cdot\left(-1+\frac{e^{cy}}{e^{cy}-x}\right)dy$$

$$= \int_0^\infty \cos(ay+b)\cdot\left(-1+\frac{1}{1-xe^{-cy}}\right)dy$$

$$= \int_0^\infty \left(\cos(ay+b)\cdot\sum_{n=1}^\infty (xe^{-cy})^n\right)dy$$

$$= \sum_{n=1}^\infty\left[\int_0^\infty e^{-cny}\cos(ay+b)dy\right]x^n \qquad (1)$$

(利用逐項積分法)

$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{cn\cos b - a\sin b}{c^2n^2+a^2}x^n \quad \text{(利用引理 A)} \qquad (2)$$

利用參數微分法，(2)式等號兩邊同時對 $x$ 做 $k$ 次微分得到 $\int_0^\infty \frac{e^{cy}\cos(ay+b)}{(e^{cy}-x)^{k+1}}dy$

$$= \frac{1}{k!}\cdot\sum_{n=k}^\infty \frac{(cn\cos b - a\sin b)\cdot n!}{(c^2n^2+a^2)\cdot(n-k)!}x^{n-k}$$

$$= \sum_{n=k}^\infty \frac{\binom{n}{k}\cdot(cn\cos b - a\sin b)}{c^2n^2+a^2}x^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{\binom{n+k}{k}\cdot[c(n+k)\cos b - a\sin b)]}{c^2(n+k)^2+a^2}x^n \qquad \blacksquare$$

**附註 1：** (1) 式等號成立的原因是因爲 $\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty \left|e^{-cny}\cos(ay+b)x^n\right|dy$

$$\le \sum_{n=1}^\infty\left(\int_0^\infty e^{-cny}dy\right)|x|^n$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{cn}|x|^n < \infty \text{ ，}$$

所以可以利用逐項積分法。

其次我們將有關正弦函數的瑕積分 $\int_0^\infty \frac{e^{cy}\sin(ay+b)}{(e^{cy}-x)^{k+1}}dy$ 表示成 $x$ 的冪級數：

**定理 2：** 和定理 1 相同的假設，$\int_0^\infty \frac{e^{cy}\sin(ay+b)}{(e^{cy}-x)^{k+1}}dy$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{\binom{n+k}{k}\cdot[c(n+k)\sin b + a\cos b]}{c^2(n+k)^2+a^2}x^n \text{ 。}$$

**證明：** 將定理 1 結果中的 $b$ 改成 $b+\frac{\pi}{2}$ 就可以得到本定理的結果 $\blacksquare$

在證明定理 3 之前，我們需要以下關於雙曲餘弦函數瑕積分的引理：

**引理 B：** 設 $a,b,c$ 爲實數, $c>|a|$ 且 $n$ 爲正整數，則 $\int_0^\infty e^{-cny}\cosh(ay+b)dy = \frac{cn\cosh b + a\sinh b}{c^2n^2-a^2}$ 。

**證明：** $\int_0^\infty e^{-cny}\cosh(ay+b)dy$

$$= \int_0^\infty e^{-cny}\left(\frac{e^{ay+b}+e^{-(ay+b)}}{2}\right)dy$$

$$= \frac{e^b}{2}\int_0^\infty e^{-(cn-a)y}dy + \frac{e^{-b}}{2}\int_0^\infty e^{-(cn+a)y}dy$$

$$= \frac{e^b}{2(cn-a)} + \frac{e^{-b}}{2(cn+a)}$$

$$= \frac{cn\cosh b + a\sinh b}{c^2n^2-a^2} \qquad \blacksquare$$

下面定理 3 是將雙曲餘弦函數的瑕積分

$\int_0^\infty \frac{e^{cy}\cosh(ay+b)}{(e^{cy}-x)^{k+1}}dy$ 表示成 $x$ 的冪級數：

**定理 3：** 設 $a,b,c,x$ 為實數，$c>|a|$，$|x|<1$ 且 $k$ 為任意正整數，則瑕積分 $\int_0^\infty \frac{e^{cy}\cosh(ay+b)}{(e^{cy}-x)^{k+1}}dy$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{n+k}{k}\cdot[c(n+k)\cosh b+a\sinh b]}{c^2(n+k)^2-a^2}x^n \text{。}$$

**證明**：因為 $\int_0^\infty \cosh(ay+b)\cdot\left(\frac{x}{e^{cy}-x}\right)dy$

$$=\int_0^\infty \cosh(ay+b)\cdot\left(-1+\frac{1}{1-xe^{-cy}}\right)dy$$

$$=\int_0^\infty\left(\cosh(ay+b)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(xe^{-cy})^n\right)dy$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^\infty e^{-cny}\cosh(ay+b)dy\right]x^n \qquad (3)$$

(利用逐項積分法)

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cn\cosh b+a\sinh b}{c^2n^2-a^2}x^n \quad \text{(利用引理 B)} \qquad (4)$$

利用參數微分法，(4)式等號兩邊同時對 $x$ 做 $k$ 次微分得到 $\int_0^\infty \frac{e^{cy}\cosh(ay+b)}{(e^{cy}-x)^{k+1}}dy$

$$=\frac{1}{k!}\cdot\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(cn\cosh b+a\sinh b)\cdot n!}{(c^2n^2-a^2)\cdot(n-k)!}x^{n-k}$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\binom{n}{k}\cdot(cn\cosh b+a\sinh b)}{c^2n^2-a^2}x^{n-k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{n+k}{k}\cdot[c(n+k)\cosh b+a\sinh b]}{c^2(n+k)^2-a^2}x^n \qquad \blacksquare$$

**附註 2：** (3) 式等號成立的原因是因為 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty \left|e^{-cny}\cosh(ay+b)x^n\right|dy$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^\infty e^{-(cn-a)y+b}dy+\int_0^\infty e^{-(cn+a)y-b}dy\right)|x|^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^b}{cn-a}+\frac{e^{-b}}{cn+a}\right)|x|^n<\infty \text{，}$$

所以可以利用逐項積分法。

和引理 B 相同的證明方式，我們有以下的引理：

**引理 C：** 和引理 B 相同的假設，瑕積分 $\int_0^\infty e^{-cny}\sinh(ay+b)dy=\frac{cn\sinh b+a\cosh b}{c^2n^2-a^2}$ 。

有了引理 C，我們很容易將雙曲正弦函數的瑕積分 $\int_0^\infty \frac{e^{cy}\sinh(ay+b)}{(e^{cy}-x)^{k+1}}dy$ 表示成 $x$ 的冪級數，其證明方式和定理 3 是一樣的：

**定理 4：** 設 $a,b,c,x$ 為實數，$c>|a|$，$|x|<1$ 且 $k$ 為任意正整數，則瑕積分 $\int_0^\infty \frac{e^{cy}\sinh(ay+b)}{(e^{cy}-x)^{k+1}}dy$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{n+k}{k}\cdot[c(n+k)\sinh b+a\cosh b]}{c^2(n+k)^2-a^2}x^n \text{。}$$

## 參、例子說明

以下我們就針對上面提到的四種類型瑕積分問題，舉出四個例子實際的利用定理 1, 2, 3, 4 來求解，而這些瑕積分的答案都是以無窮級數的型式呈現的：

**例題 1:** 利用定理 1 可以得到關於餘弦函數的瑕積分 $\int_0^\infty \frac{e^{4y}\cos\left(3y+\frac{\pi}{4}\right)}{(2e^{4y}-1)^3}dy$

$$=\frac{1}{8}\cdot\int_0^\infty \frac{e^{4y}\cos\left(3y+\frac{\pi}{4}\right)}{\left(e^{4y}-\frac{1}{2}\right)^3}dy$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{n+2}{2}\cdot\left[4(n+2)\cos\frac{\pi}{4}-3\sin\frac{\pi}{4}\right]}{16(n+2)^2+3^2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{16}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+5)\binom{n+2}{2}}{16(n+2)^2+9}\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{。}$$

接著我們用 Maple 計算出 $\int_0^{\infty}\frac{e^{4y}\cos\left(3y+\frac{\pi}{4}\right)}{(2e^{4y}-1)^3}dy$ 和 $\frac{\sqrt{2}}{16}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+5)\binom{n+2}{2}}{16(n+2)^2+9}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 的近似值：

```
>evalf(int(exp(4*y)*( 1/sqrt(2)*cos(3*y)- 1/sqrt(2)
*sin(3*y))/(2*exp(4*y)-1)^3,y=0..infinity),20);
0.032267447173317337495
>evalf(sqrt(2)/16*sum((4*n+5)*product(n+2-i,i=0..1)
*(1/2)^n/(2!*(16*(n+2)^2+9)),n=0..infinity),20);
0.032267447173317337494 + 0. I
```

上面 Maple 計算 $\frac{\sqrt{2}}{16}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+5)\binom{n+2}{2}}{16(n+2)^2+9}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 得到的答案中出現了虛數 I($=\sqrt{-1}$)，是因為 Maple 用自己內建的特殊函數計算的結果，但由於虛數部分為 0，而且實數部分非常接近 $\int_0^{\infty}\frac{e^{4y}\cos\left(3y+\frac{\pi}{4}\right)}{(2e^{4y}-1)^3}dy$ 的近似值，所以印證了我們答案的正確性。接著我們研究關於正弦函數的瑕積分問題：

**例題 2：** 利用定理 2 可以得到正弦函數的瑕積分

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{3y}\sin\left(2y-\frac{\pi}{6}\right)}{\left(e^{3y}+\frac{1}{2}\right)^4}dy$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{n+3}{3}\left[3(n+3)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]}{9(n+3)^2+2^2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n+9-2\sqrt{3})\binom{n+3}{3}}{9(n+3)^2+4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \text{。}$$

以下我們用 Maple 算出 $\int_0^{\infty}\frac{e^{3y}\sin\left(2y-\frac{\pi}{6}\right)}{\left(e^{3y}+\frac{1}{2}\right)^4}dy$ 和 $-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n+9-2\sqrt{3})\binom{n+3}{3}}{9(n+3)^2+4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 的近似值：

```
>evalf(int(exp(3*y)*(sin(2*y) *sqrt(3)/2-cos(2*y)*
1/2)/(exp(3*y)+1/2)^4,y=0..infinity),20);
-0.0072611168523915828471
>evalf(-1/2*sum((3*n+9-2*sqrt(3))*product(n+3-i,i=
0..2)*(-1/2)^n/(3!*(9*(n+3)^2+4)),n=0..infinity),20);
-0.0072611168523915828480 - 0. I
```

上面 Maple 計算 $-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n+9-2\sqrt{3})\binom{n+3}{3}}{9(n+3)^2+4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 的近似值中出現了虛數 I，同樣是因為 Maple 用自己內建的特殊函數計算的緣故，因為虛數部分為 0 並且實數部分非常接近 $\int_0^{\infty}\frac{e^{3y}\sin\left(2y-\frac{\pi}{6}\right)}{\left(e^{3y}+\frac{1}{2}\right)^4}dy$ 的近似值，因此驗證了我們答案的正確性。接著我們研究有關雙曲餘弦函數的瑕積分問題：

**例題 3：** 利用定理 3 可以得到瑕積分

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{5y}\cosh(3y+2)}{(e^{5y}-0.7)^5}dy$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{n+4}{4} \cdot [(5n+20)\cosh 2 + 3\sinh 2]}{25(n+4)^2 - 9} (0.7)^n ,$$

接著利用 Maple 分別算出此瑕積分及其無窮級數解的近似值：

```
>evalf(int(exp(5*y)*cosh(3*y+2) /(exp(5*y)-0.7)^5, y=0..infinity),20);
```

24.506142246435114866

```
>evalf(sum(((5*n+20)*cosh(2)+3*sinh(2))*product(n+4-i,i=0..3)*(0.7)^n/(4!*(25*(n+4)^2-9)),n=0..infinity),20);
```

24.506142246435114862

由上面 Maple 算出 $\int_0^{\infty} \frac{e^{5y}\cosh(3y+2)}{(e^{5y}-0.7)^5} dy$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{n+4}{4} \cdot [(5n+20)\cosh 2 + 3\sinh 2]}{25(n+4)^2 - 9} (0.7)^n$ 兩者的近似值非常接近，因此驗證了我們理論的正確性。最後我們研究有關雙曲正弦函數的瑕積分問題：

**例題 4：** 利用定理 4 我們可以得到瑕積分

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{\sqrt{3}y}\sinh(\sqrt{2}y-5)}{\left(e^{\sqrt{3}y}+\frac{3}{4}\right)^8} dy$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{n+7}{7} \cdot [-\sqrt{3}(n+7)\sinh 5 + \sqrt{2}\cosh 5]}{3(n+7)^2 - 2} \left(-\frac{3}{4}\right)^n$$

以下我們利用 Maple 分別算出此瑕積分及其無窮級數解的近似值：

```
>evalf(int(exp(sqrt(3)*y)*sinh(sqrt(2)*y-5)/(exp(sqrt(3)*y)+3/4)^8,y=0..infinity),20);
```

-0.10234852371391831591

```
>evalf(sum((-sqrt(3)*(n+7)*sinh(5)+sqrt(2)*cosh(5))*product(n+7-i,i=0..6)*(-3/4)^n/(7!*(3*(n+7)^2-2)),n=0..infinity),20);
```

-0.10234852371391831590

同樣由上面 Maple 算出 $\int_0^{\infty} \frac{e^{\sqrt{3}y}\sinh(\sqrt{2}y-5)}{\left(e^{\sqrt{3}y}+\frac{3}{4}\right)^8} dy$

和 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{n+7}{7} \cdot [-\sqrt{3}(n+7)\sinh 5 + \sqrt{2}\cosh 5]}{3(n+7)^2 - 2} \left(-\frac{3}{4}\right)^n$

兩者的近似值非常接近，所以印證了我們的理論是正確的。

## 肆、結論

由以上的四個例子可以知道定理 1, 2, 3, 4 是解決本文所探討的四種瑕積分問題的主要理論依據，並且我們看到參數微分法和逐項積分法在我們的定理證明中扮演著重要的角色。事實上參數微分法和逐項積分法的應用非常廣泛，許多困難的積分問題經由它們都可以迎刃而解，將來我們會陸續發表一些這方面的論文。

## 伍、誌謝

感謝審稿委員對本文提出的寶貴意見以及需要改進的地方，我們已經盡最大的努力來修正。

## 參考文獻

1. 余啓輝 (2012a, 5 月)。參數微分法在積分問題上的應用。2012 南榮通識教育學術研討會，台南市：南榮技術學院。
2. 余啓輝 (2012b, 5 月) 。Maple 在求解兩種積分問題上的應用。第九屆服務業管理與創新學術研討會，台南市：南台科技大學。
3. 余啓輝 (2012c, 6 月)。Maple 在一些積分問題上的應用。2012ICSSMET 安全管理與工程技術國際研討會，嘉義縣：吳鳳科技大學。
4. 余啓輝 (2012d, 6 月)。Maple 的應用－以兩種特殊的積分問題爲例子。KC2012 第八屆知識

社群國際研討會，台北市：中國文化大學。

5. 余啓輝 (2012e, 6 月)。Maple 在求解瑕積分問題上的應用。2012 數位與科技生活創新應用學術研討會，桃園縣：創新技術學院。
6. 賴漢卿 (1979)。應用數學(高等微積分、工程數學)。台北市：文笙書局。
7. Apostol, T. M. (1975). *Mathematical analysis* (2nd ed.). Massachusetts:Addison-Wesley Publishing Co.,Inc.
8. Baxa, C., & Schoißengeier, J. (2002). Calculation of improper integrals using (n α) -sequences. *Monatshefte für Mathematik*, *135* (4), 265-277.
9. Ghorpade, S. R., & Limaye, B. V. (2006). *A course in calculus and real analysis.* UTM series. New York:Springer Co.
10. Gray, H. L., & Wang, S. (1992). A new method for approximating improper integrals. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, *29*(1), 271-283.
11. Haber, S. (1975). Adaptive integration and improper integrals. *Mathematics of Computation*, *29*(131), 806-809.
12. Lang, S. (1983). *Undergraduate analysis*. UTM series. New York:Springer-Verlag.
13. Ponnusamy, S. (2012). *Foundations of mathematical analysis.* New York:Springer Co.
14. Widder, D. V. (1961). *Advanced calculus* (2nd ed.). Englewood Cliffs, N. J.：Prentice-Hall, Inc.

CHIA-NAN ANNUAL BULLETIN
VOL.38,PP.241-248,2012

# Power Series Forms of Four Types of Improper Integrals

Chii Huei Yu

Center for General Education, Nan Jeon Institute of Technology, Tainan, Taiwan 73746, R.O.C.

## Abstract

This paper studies the evaluating problem of four different types of improper integrals, and we can obtain the power series forms of these four types of improper integrals using two important methods in advanced calculus —differentiation with respect to a parameter and integration term by term. Simultaneously, we propose four improper integral examples to do calculation practically, and the answers of these four improper integrals are presented in infinite series forms. On the other hand, we employ the mathematical software Maple to calculate the approximations of these improper integrals and their infinite series forms.

**Keywords: improper integrals, power series , differentiation with respect to a parameter, integration term by term, infinite series**

*Correspondence: Center of General Education, Nan Jeon Institute of Technology, Tainan, Taiwan 73746, R.O.C.
Tel: +886-6-6523111 Ext. 7525
Fax: +886-6-2585573
E-mail: chiihuei@mail.njtc.edu.tw

回目錄頁