

嘉南藥理科技大學專題研究計畫成果報告

計畫編號：CNMI94-01

計畫名稱：推估未知觀測值在已知分配下的信賴區間

執行期間：94 年 1 月 1 日至 94 年 12 月 31 日

整合型計畫

個別型計畫

計畫總主持人：陸海林

計畫主持人：

子計畫 1 主持人：陸海林

對極值(Extreme value)分配資料推估
未之觀測值之信賴區間

子計畫 2 主持人：薛雅明

對常態對數(lognormal)分配資料推估
未之觀測值之信賴區間

子計畫 3 主持人：陸海林

對柏拉圖(Pareto)分配資料推估未之觀
測值之信賴區間

中華民國 95 年 02 月 28 日

總計畫名稱：推估未知觀測值在已知分配下的信賴區間

子計畫 1：對極值(Extreme value)分配資料推估未之觀測值之信賴區間

極值(Extreme value)分配於工業上可靠度、商業上運用的非常廣泛，在此分配下預估未知元件或未來再發生事件時，通常需估計母體分配之參數，在實務上，資料的收集常常由於時間的限制與經費的不許可，而得不到完全的資訊，如此不完全資料我們稱為 censored data，通常分為 type I censored sample 與 type II censored sample(see Lee)，如此之資料不易估計母體分配之參數。

本文提出以一些適當的基準量(Pivotal)，對於多邊型二設限樣本(包含完全資料與 type II censored scheme— type II right censored data、type II left censored data、type II double censored data)下二參數極值(Extreme value)分配，預測樣本大小為 n 中第 j 個元件順序觀測值之信賴區間。另外，在相同之設限樣本下，討論其近似預測區間，最佳線性不偏估計，與近似最大概似估計。在實際應用上，對於壽命試驗的耐用時間，可以預測出系統大小為 n 之第 j 個元件的故障時間。最後，並以兩個實際例子說明。

二參數極值(Extreme value)分配定義如下：

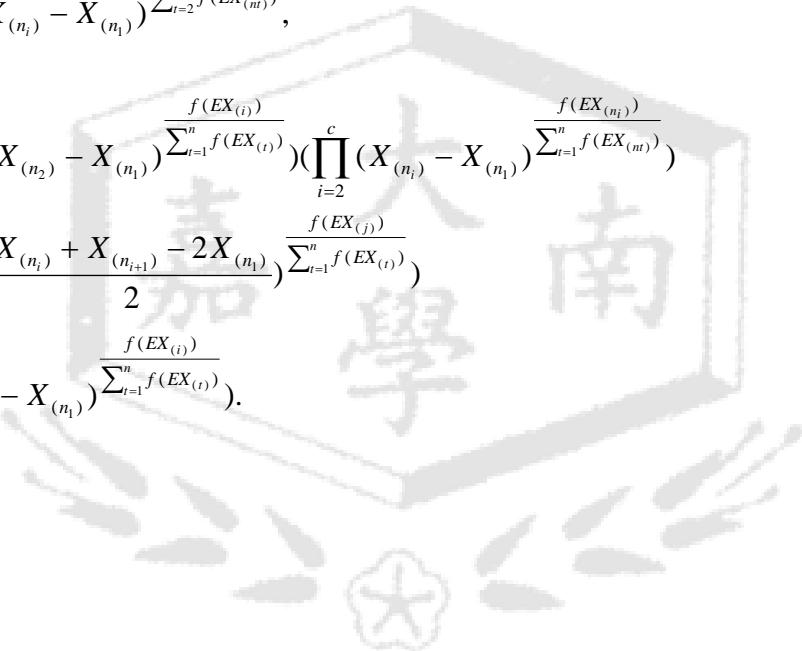
$$f(x) = \frac{1}{\beta} \exp\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right) \quad (1)$$
$$-\infty < \alpha < \infty, \beta > 0$$

我們所提出一個與觀測值有關的基準量(pivotal quantity)，其機率分布與參數 α ， β 無關。令 $Q(X)$ 為此基準量且假設型態如 $\{q_1 < Q < q_2\}$ 之區間且可以被轉換成型態如 $\{L(X) < X_{(j)} < U(X)\}$ 之 $X_{(j)}$ 的預測區間；如果 $P\{q_1 < Q < q_2\} = 1 - \alpha$ ，於是提供 $(L(X), U(X))$ 為 $X_{(j)}$ 的一個 $(1 - \alpha)100\%$ 之信賴區間；於此我們所提出的基準量為

$$U_1 = \frac{X_{(j)} - X_{(n-s)}}{W_1}, \quad n - s < j \leq n, \quad (2)$$

where

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_1 &= \sum_{i=2}^c \frac{f(EX_{(n_i)})}{\sum_{t=2}^c f(EX_{(n_t)})} (X_{(n_i)} - X_{(n_1)}), \\
\tilde{W}_2 &= \sum_{i=1}^{n_1-1} \frac{f(EX_{(i)})}{\sum_{t=1}^n f(EX_{(t)})} (X_{(n_2)} - X_{(n_1)}) + \sum_{i=2}^c \frac{f(EX_{(i)})}{\sum_{t=1}^n f(EX_{(t)})} (X_{(n_i)} - X_{(n_1)}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{c-1} \sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}-1} \frac{f(EX_{(j)})}{\sum_{t=1}^n f(EX_{(t)})} (X_{(n_i)} + X_{(n_{i+1})} - 2X_{(n_1)}) / 2 \\
&\quad + \sum_{i=n_c+1}^n \frac{f(EX_{(i)})}{\sum_{t=1}^n f(EX_{(t)})} (X_{(n_c)} - X_{(n_1)}), \\
\tilde{W}_3 &= \prod_{i=2}^c (X_{(n_i)} - X_{(n_1)})^{\frac{f(EX_{(n_i)})}{\sum_{t=2}^c f(EX_{(n_t)})}}, \\
\tilde{W}_4 &= (\prod_{i=1}^{n_1-1} (X_{(n_2)} - X_{(n_1)})^{\frac{f(EX_{(i)})}{\sum_{t=1}^n f(EX_{(t)})}}) (\prod_{i=2}^c (X_{(n_i)} - X_{(n_1)})^{\frac{f(EX_{(n_i)})}{\sum_{t=1}^n f(EX_{(n_t)})}}) \\
&\quad (\prod_{i=1}^{c-1} \prod_{j=n_i+1}^{n_{i+1}-1} (\frac{X_{(n_i)} + X_{(n_{i+1})} - 2X_{(n_1)}}{2})^{\frac{f(EX_{(j)})}{\sum_{t=1}^n f(EX_{(t)})}}) \\
&\quad (\prod_{i=n_c+1}^n (X_{(n_c)} - X_{(n_1)})^{\frac{f(EX_{(i)})}{\sum_{t=1}^n f(EX_{(t)})}}).
\end{aligned}$$



總計畫名稱：推估未知觀測值在已知分配下的信賴區間

子計畫 2：對常態對數(lognormal)分配資料推估未之觀測值之信賴區間

對數常態(Lognormal)分配廣汎的於運用各種領域，在此分配下預估未知元件或未來再發生事件時，通常需估計母體分配之參數，在實務上，資料的收集常常由於時間的限制與經費的不許可，而得不到完全的資訊，如此不完全資料我們稱為 censored data，通常分為 type I censored sample 與 type II censored sample(see Lee)，如此之資料不易估計母體分配之參數。

本文提出以一些適當的基準量(Pivotal)，對於多邊型二設限樣本(包含完全資料與 type II censored scheme— type II right censored data、type II left censored data、type II double censored data)下二參數對數常態(Lognormal)分配，預測樣本大小為 n 中第 j 個元件順序觀測值之信賴區間。另外，在相同之設限樣本下，討論其近似預測區間，最佳線性不偏估計，與近似最大概似估計。在實際應用上，對於壽命試驗的耐用時間，可以預測出系統大小為 n 之第 j 個元件的故障時間。最後，並以兩個實際例子說明。

二參數對數常態(Lognormal)分配定義如下：

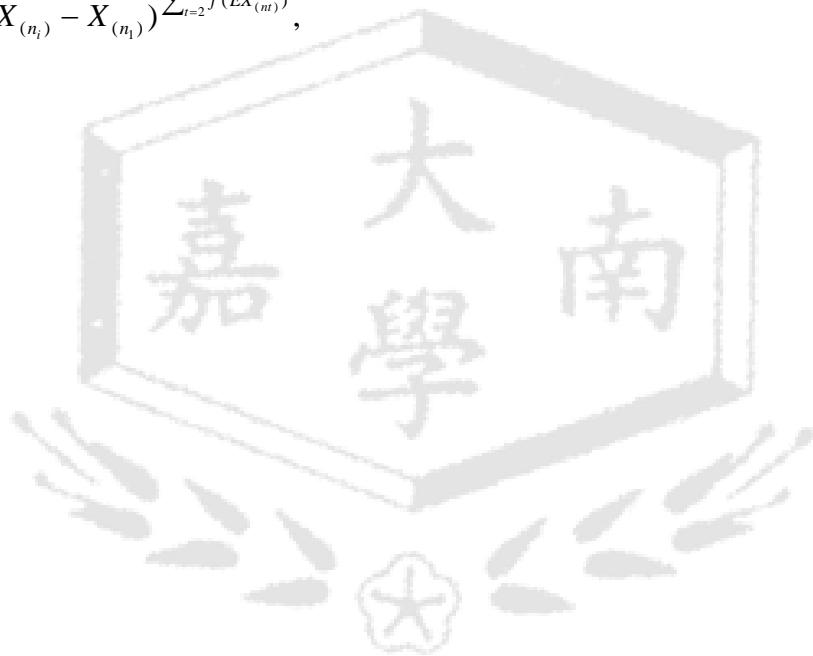
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\log x - \mu}{2\sigma^2}\right) \quad (1)$$
$$-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$$

我們所提出一個與觀測值有關的基準量(pivotal quantity)，其機率分布與參數 μ ， σ 無關。令 $Q(X)$ 為此基準量且假設型態如 $\{q_1 < Q < q_2\}$ 之區間且可以被轉換成型態如 $\{L(X) < X_{(j)} < U(X)\}$ 之 $X_{(j)}$ 的預測區間；如果 $P\{q_1 < Q < q_2\} = 1 - \alpha$ ，於是提供 $(L(X), U(X))$ 為 $X_{(j)}$ 的一個 $(1 - \alpha)100\%$ 之信賴區間；於此我們所提出的基準量為

$$U_1 = \frac{X_{(j)} - X_{(n-s)}}{W_1}, \quad n - s < j \leq n, \quad (2)$$

where

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_1 &= \sum_{i=2}^c \frac{f(EX_{(n_i)})}{\sum_{t=2}^c f(EX_{(n_t)})} (X_{(n_i)} - X_{(n_1)}), \\
\tilde{W}_2 &= \sum_{i=1}^{n_1-1} \frac{f(EX_{(i)})}{\sum_{t=1}^n f(EX_{(t)})} (X_{(n_2)} - X_{(n_1)}) + \sum_{i=2}^c \frac{f(EX_{(i)})}{\sum_{t=1}^n f(EX_{(t)})} (X_{(n_i)} - X_{(n_1)}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{c-1} \sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}-1} \frac{f(EX_{(j)})}{\sum_{t=1}^n f(EX_{(t)})} (X_{(n_i)} + X_{(n_{i+1})} - 2X_{(n_1)}) / 2 \\
&\quad + \sum_{i=n_c+1}^n \frac{f(EX_{(i)})}{\sum_{t=1}^n f(EX_{(t)})} (X_{(n_c)} - X_{(n_1)}), \\
\tilde{W}_3 &= \prod_{i=2}^c (X_{(n_i)} - X_{(n_1)})^{\frac{f(EX_{(n_i)})}{\sum_{t=2}^c f(EX_{(n_t)})}},
\end{aligned}$$



總計畫名稱：推估未知觀測值在已知分配下的信賴區間

子計畫 3：對柏拉圖(Pareto)分配資料推估未之觀測值之信賴區間

柏拉圖(Pareto)分配於商業上運用的非常廣汎，在此分配下預估未知元件或未來再發生事件時，通常需估計母體分配之參數，在實務上，資料的收集常常由於時間的限制與經費的不許可，而得不到完全的資訊，如此不完全資料我們稱為 censored data，通常分為 type I censored sample 與 type II censored sample(see Lee)，如此之資料不易估計母體分配之參數。

本文提出以一些適當的基準量(Pivotal)，對於多邊型二設限樣本(包含完全資料與 type II censored scheme— type II right censored data、type II left censored data、type II double censored data)下二參數柏拉圖(Pareto)分配，預測樣本大小為 n 中第 j 個元件順序觀測值之信賴區間。另外，在相同之設限樣本下，討論其近似預測區間，最佳線性不偏估計，與近似最大概似估計。在實際應用上，對於壽命試驗的耐用時間，可以預測出系統大小為 n 之第 j 個元件的故障時間。

二參數柏拉圖(Pareto)分配定義如下：

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{x - \alpha}\right)^k \quad (1)$$

其中 k 已知名， $x > \alpha + \beta$ 。

我們所提出一個與觀測值有關的基準量(pivotal quantity)，其機率分布與參數 μ 與 σ 無關。令 $Q(X)$ 為此基準量且假設型態如 $\{q_1 < Q < q_2\}$ 之區間且可以被轉換成型態如 $\{L(X) < X_{(j)} < U(X)\}$ 之 $X_{(j)}$ 的預測區間；如果 $P\{q_1 < Q < q_2\} = 1 - \alpha$ ，於是提供 $(L(X), U(X))$ 為 $X_{(j)}$ 的一個 $(1 - \alpha)100\%$ 之信賴區間；於此我們所提出的基準量為

$$U_1 = \frac{X_{(j)} - X_{(n-s)}}{W_1}, \quad n-s < j \leq n, \quad (2)$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{W}_1 &= \sum_{i=2}^c \frac{f(EX_{(n_i)})}{\sum_{t=2}^c f(EX_{(n_t)})} (X_{(n_i)} - X_{(n_1)}), \\ \tilde{W}_2 &= \sum_{i=1}^{n_1-1} \frac{f(EX_{(i)})}{\sum_{t=1}^n f(EX_{(t)})} (X_{(n_2)} - X_{(n_1)}) + \sum_{i=2}^c \frac{f(EX_{(i)})}{\sum_{t=1}^n f(EX_{(t)})} (X_{(n_i)} - X_{(n_1)}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{c-1} \sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}-1} \frac{f(EX_{(j)})}{\sum_{t=1}^n f(EX_{(t)})} (X_{(n_i)} + X_{(n_{i+1})} - 2X_{(n_1)})/2 \\ &\quad + \sum_{i=n_c+1}^n \frac{f(EX_{(i)})}{\sum_{t=1}^n f(EX_{(t)})} (X_{(n_c)} - X_{(n_1)}), \\ \tilde{W}_3 &= \prod_{i=2}^c (X_{(n_i)} - X_{(n_1)})^{\frac{f(EX_{(n_i)})}{\sum_{t=2}^c f(EX_{(n_t)})}}, \end{aligned}$$

