

使用虛擬壓縮性法數值模擬脈衝流於非等截徑彈性管中之流場

Numerical Simulation of Pulsatile Flow in Elastic Tubes with Nonuniform Cross-Sections by Pseudo-Compressibility Method

馮建忠

瑞領科技有限公司

蘇致遠

嘉南藥理科技大學資訊管理系

伍次寅、王傳禎

國立台灣大學機械工程學系

王淑音

中國文化大學動物科學系

摘要

本研究運用數值方法來計算脈衝流(pulsatile flow)於彈性頸縮管(elastic tube)內之流場變化。血液被視為不可壓縮之 Newtonian 流體，流場之統御方程式則為不可壓縮形式之非定常(unsteady) Navier-Stokes 方程組。在薄管壁之假設下，運用彈性力學中應力及應變之力平衡導出管壁運動之方程式。管內流體與管壁運動之交互作用(fluid-structure interaction)乃透過流體施加於管壁上的力與管壁位移速度作動態之耦合(dynamical coupling)，並採用雙時步(dual time-step)虛擬壓縮性法(pseudo-compressibility)配合有限體積法(finite-volume formulation)來求得 Navier-Stokes 方程式之數值解。

關鍵詞：脈衝流、彈性管、血管、數值模擬、虛擬壓縮性法、動脈粥樣硬化

In this study, we apply a numerical scheme to calculate a pulsatile flow in an elastic tube with variable cross section. The purpose is to simulate the blood flow in arterial vessels and to study its dynamics. The blood is assumed to be an incompressible Newtonian fluid, and the flow field is governed by a set of unsteady incompressible Navier-Stokes equations. Under the assumption of a thin-wall tube, the motion of the tube wall can be derived from a force-balance equation using an elastic stress-strain relation. Dynamic coupling of the fluid flow and the tube-wall motion through the pressure at the tube wall is considered in this formulation. In the fluid part, the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations are first written into a conservative hyperbolic form and then solved by using a dual time step plus pseudo-compressibility strategy. A finite volume formulation is adopted, and an upwind difference combined with the TVD scheme is applied to evaluate the flux terms.

Keywords : pulsatile flow, elastic tube, blood vessel, numerical calculation, Pseudo-Compressibility Method (atherosclerosis)

一、前言

動脈血管因為承受心臟收縮、舒張所產生血流的壓力、速度變化。此血管內流場的流速和壓力之分布近年來之文獻中更指出它與一般常見之心血管疾病例如血栓(thrombosis)、動脈硬化(atherosclerosis)等有著密切關聯，因而突顯出以計算流力來模擬研究血管內血液流動流場之重要性與迫切性。

早期動脈血管流場在數值方面的研究，以管壁變形量微小為前題，不考慮管壁運動，此外並採用線性化後之不可壓縮奈維爾-史托克(Navier-Stokes)方程式進行分析，但這樣的方式並無法適切的描述血管之流場特性。而且由於造成動脈血管內脈衝血流(pulsatile flow)現象的原因主要來自於：流體統御方程式之加速、血管管壁之黏彈(viscoelasticity)現象以及彈性管壁之運動等效應結合的影響。因此，本研究將以數值計算法來求解非線性之奈維爾-史托克方程式，並配合線性化後之管壁運動方程式來分析探討流場與管壁運動耦合下之動脈血管流場特性。

為模擬因心臟收縮、舒張所產生之脈衝血流(pulsatile flow)，統御流場運動之方程式將採用非定常形式之奈維爾-史托克方程式。在管壁運動部份，將由彈性薄管之應力和應變關係經由力平衡式導出的統御管壁位移之運動方程代表，而管壁之運動將藉由壁面上之壓力分布與流場運動耦合，利用數值計算法求解管壁和流場運動方程式。所採用的方式為虛擬壓縮性法配合有限體積法將原統御方程式以 TVD 算則予以離散化，並應用 LUSGS 隱式時間解法於虛擬時步上，以增進數值解之收斂性。

本研究之目的在於探討管徑頸縮對管內流場之影響，藉以瞭解血管因狹窄(stenosis)等因素所造成之潛在危機。研究所作假設如下所示：

- (1)血液為一單相之不可壓縮 Newtonian 流體；
- (2)僅考慮單一管路，管壁具彈性，但不具滲透性；

- (3)為簡化流域幾何，假設流場為軸對稱之形式；
- (4)假設薄管壁，忽略管壁沿徑向之應力變化。

二、文獻回顧

1958 年，Lambert 應用特徵線法成功的建立一維模式來模擬血管內之流場。但由於只是一維，無法得知每個截面上之流體速度分佈，因此限制了血管內流場現象之進一步了解。直到 Ling and Atabek[1] 才藉由局部流理論(local flow theory)，針對奈維爾-史托克方程式予以局部區域近似，並以實驗量測得到之壓力、壓力梯度以及壓力-半徑關係式代入近似後之方程，數值計算後獲得截面上之速度分佈。此外，近年來 Perktold 等[2]曾針對分歧血管流場作計算，但此類計算多將血管視為一剛體(rigid wall)以簡化數學模式。另有文獻探討單一彈性管管壁之彈性變形對管內流場及流體於管壁剪應力之影響[3]，其所使用之流體-管壁交互作用模式為一靜態之耦合(static coupling)，且泰半假設流場為一不隨時間變化之穩態流(steady flow)。此外，亦有文獻探討 Non-Newtonian 流體於剛性擴張管中之流動情形[4]；以鋼體管壁為假設模擬具滲透性管壁之管流[5]。文獻中 Taylor and Yamaguchi[6]、Downing and Ku[7]則藉由流場計算來探討血管因狹窄(stenosis)而形成局部低壓因而引發管壁塌陷(collapse)症狀之問題。以上這些研究都僅考慮穩態流場及靜態之流體-管壁應變耦合模式。

三、流場之統御方程式

Chorin[8]所提出虛擬壓縮性法將壓力對時間的微分項加在連續方程式中，使得連續方程式與動量方程式能夠耦合在一起，成為一組雙曲型的方程組。若再引入虛擬壓縮因子，則修正過後之連續方程式為：

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

其中 β 為虛擬壓縮因子(pseudocompressibility)。至於二維圓柱座標非定常形式之動量方程則為：

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(E - E_v)}{\partial z} + \frac{\partial(F - F_v)}{\partial r} = S_{source} \quad (2)$$

其中

$$Q = \begin{bmatrix} rp \\ ru \\ rv \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \beta ru \\ ruu + rp \\ ruv \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \beta rv \\ ruv \\ rvv + rp \end{bmatrix}$$

$$E_v = \frac{1}{\text{Re}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2ru_z \\ r(u_r + v_z) \end{bmatrix}, \quad F_v = \frac{1}{\text{Re}} \begin{bmatrix} 0 \\ r(u_r + v_z) \\ 2rv_r \end{bmatrix}$$

$$S_{source} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p - \frac{1}{\text{Re}} \frac{2v}{r} \end{bmatrix}$$

由於在連續方程式中壓力對時間的微分項 $\partial p / \partial \tau$ 並非真正的物理時間，因此在應用此方法求解非定常流之問題時，必須以虛擬時間次疊代的方式進行計算，以使得在每一物理時步內均能維持無散度的速度流場。

黏性不可壓縮流原始的統御方程式為橢圓型型式，因此在不可壓縮流的流場當中，任何微小的壓力擾動所引發之壓力波的傳遞速度為無窮大，當流場內任何一處的壓力場改變時，整個流場的特性也瞬間隨之改變。然而引入了虛擬壓縮性之後，統御方程式已由原始的橢圓型式轉換成為雙曲型的方程式，因而壓力波的傳遞速度改變為有限值，而傳遞速度的大小則由虛擬壓縮因子 β 來決定。

經由下述之座標轉換，原先之守恆統御方程式(2)可改寫成一般曲線座標 (τ, ξ, η)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\hat{Q}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{E} - \hat{E}_v) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\hat{F} - \hat{F}_v) = \hat{S}_{source} \quad (3)$$

其中

$$\hat{Q} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} rp \\ ru \\ rv \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \beta rU \\ ruU + rp\xi_z + ru\xi_t \\ rvU + rp\xi_r + rv\xi_t \end{bmatrix}$$

$$\hat{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \beta rV \\ ruV + rp\eta_z + ru\eta_t \\ rvV + rp\eta_r + rv\eta_t \end{bmatrix}$$

$$\hat{E}_v = \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ 2ru_z \xi_z + r(u_r + v_z) \xi_r \\ r(u_r + v_z) \xi_z + 2rv_r \xi_r \end{bmatrix}$$

$$\hat{F}_v = \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ 2ru_z \eta_z + r(u_r + v_z) \eta_r \\ r(u_r + v_z) \eta_z + 2rv_r \eta_r \end{bmatrix}$$

$$\hat{S}_{source} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p - 2 \frac{1}{\text{Re}} \frac{v}{r} \end{bmatrix}$$

其中

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(z, r)} = \begin{vmatrix} \xi_z & \xi_r \\ \eta_z & \eta_r \end{vmatrix} = \xi_z \eta_r - \xi_r \eta_z \quad (4)$$

$$U = u\xi_z + v\xi_r$$

$$V = u\eta_z + v\eta_r$$

四、彈性管壁運動之統御方程式

Perktold[2] 假設管壁為彈性薄管壁，且為均勻、不可壓縮物值，因此管壁表面上力平衡關係式可表示為：

$$\rho_w h \frac{\partial^2 R_r}{\partial t^2} = -\frac{Y}{1-\nu_p^2} \left(\frac{R_r}{R^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial R_z}{\partial z} \right) + w'_r \quad (5)$$

$$\rho_w h \frac{\partial^2 R_z}{\partial t^2} = \frac{Y}{1-\nu_p^2} \left(\frac{\nu}{R} \frac{\partial R_r}{\partial z} + \frac{\partial^2 R_z}{\partial z^2} \right) + w'_z \quad (6)$$

其中 ρ_w 、 h 表示管壁之密度與厚度， R_r 、 R_z 表示管壁在徑向及軸向之位移位置， Y 為管壁周圍之楊氏係數， ν_p 為 Poisson ratio， w'_r 、 w'_z 為管壁與流體之力平衡關係式，

$$w'_r = \frac{1}{h} (p - \tau_{rr}) \Big|_{wall}, \quad w'_z = -\frac{1}{h} \tau_{rz} \Big|_{wall}$$

由於動脈管壁軸向運動受肌肉組織的限制可予以忽略 ($R_z \approx 0$)，再以 p_0 、 R_0 平均狀態下之壓力及管壁半徑當作參考值，可將管壁之運動方程式予以簡化為：

$$\rho_w h \frac{\partial^2 R_r}{\partial t^2} = p_w - p_0 - \frac{Yh}{R_0} \left(\frac{R_r - R_0}{R_0} \right) \quad (7)$$

其中 p_w 為當時作用在內表面之正向壓力。

五、管壁運動與流場動態耦合之邊界條件

由於壁面與其相鄰的流體之間無相對速度，因此管壁之速度即邊界上之速度。流場在 r 方向之動量方程式為：

$$\frac{\partial(rv)}{\partial t} + \frac{\partial(ruv)}{\partial z} + \frac{\partial(rv^2)}{\partial r} = -\frac{\partial(rp)}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{v}{r} \right] \quad (8)$$

令 u_R 、 v_R 代表流體在管壁上軸向及徑向之速度，假設動脈管壁軸向運動受肌肉組織的限制可以忽略($u_R = 0$)，再將質量守恆關係式代入(8)式化簡可以得到管壁運動與流場動態之耦合關係：

$$\frac{\partial v_R}{\partial t} + \frac{v_R^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

六、數值方法

空間離散方面，為了算則說明的方便起見，我們僅概要的以一維不可壓縮流系統來介紹。

考慮一維非穩態、無黏性且不含溫度效應之不可壓縮尤拉方程式，在直角座標系 (x, t) 之偏微分方程組，可寫成如下之守恆型式：

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

其中 Q 為守恆變數， F 為通量

$$Q = \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \beta u \\ uu + p \end{bmatrix}$$

p 為壓力， u 為速度， β 為虛擬壓縮因子。方程式(9)可表示成準線性(quasi linear)型式：

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + A \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

其中 Jacobian 矩陣 $A = \frac{\partial F}{\partial Q} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 1 & 2u \end{bmatrix}$

矩陣 A 的兩個相異實數特徵值分別為 $(\lambda^1, \lambda^2) = (u + c, u - c)$ (11)

上式中 $c = \sqrt{u^2 + \beta}$ 為虛擬音速。

矩陣 A 存在如下之相似轉換

$$A = R\Lambda R^{-1} \quad (12)$$

其中 Λ 為矩陣 A 之特徵值所構成的對角矩陣，可表示成：

$$\Lambda = \begin{bmatrix} u+c & 0 \\ 0 & u-c \end{bmatrix} \quad (13)$$

R 是與矩陣 A 之特徵值相對應之特徵向量所構成的矩陣，可表示成：

$$R = \begin{bmatrix} \beta & -\beta \\ c+u & c-u \end{bmatrix} \quad (14)$$

R^{-1} 則為其反矩陣

將 $A = R\Lambda R^{-1}$ 的關係式帶入(10)式，則可改寫成：

$$R^{-1} \frac{\partial Q}{\partial t} + \Lambda R^{-1} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

若我們定義一特徵變數向量 $W = R^{-1}Q$ ，則(15)式可轉化為非耦合之純量波動方程式

$$\frac{\partial W^i}{\partial t} + \lambda^i \frac{\partial W^i}{\partial x} = 0 \quad i=1,2 \quad (16)$$

其中 λ^i 為第 i 個特徵值， W^i 為對應特徵變數向量 W 之元素，如此一來我們即可以將純量方程式所發展的算則應用於求解特徵方程式，然後再利用特徵向量矩陣 R 轉換回原先的守恆變數向量 Q ，亦即 $Q = RW$ 。經由(15)、(16)式之局部特徵變數近似法，我們可以很容易的將非線性純量算則擴展至系統守恆律。至於(9)式的數值差分法上，我們先以有限體積法(finite-volume method)來離散流場方程式。在空間差分上，我們採用 upwind difference 配合 TVD 法則[9]來求取通量(flux)之差分。

在時間離散方面，由於方程式(3)之時間微分項中，包含非真正的物理時間微分項，即所謂的虛擬時間微分項。對於非定常流的流場計算，若要求得暫態解，可利用 Rogers & Kwak [10]所提出之雙時步法(dual time stepping)來求得所須之時間精確解。利用雙時步次疊代的方式進行計算時，必須在每一物理時步內以次疊代方式來滿足無散度的速度場。本研究對時間的積分方式採用隱式解法。而在隱式解法中我們選取了計算量較少而且收斂性佳之 LUSGS 隱式時間積分法

Yoon & Jameson[11]。

本研究數值計算之流程如以下所示：

- (1) $t=0$ 時開始計算，將此時入口處之壓力、速度分佈當作整個流場之初始值。
- (2) 由管壁運動方程式求解下一時刻管壁之位移量及位移速度作為流場之邊界條件。
- (3) 以疊代法求解流場之統御方程式以求得速度及壓力分佈，未達收斂條件 TOL 或最大疊代次數則繼續次疊代，直到滿足收斂條件或最大疊代次數則繼續下一步驟。
- (4) 以上步驟所得之壁面壓力代入管壁運動方程式求取下一時刻 $t+\Delta t$ 管壁之位移量及位移速度，並重複上述步驟二至四，直到終止計算時間 t_{max} 。

七、邊界條件

本文所考慮管流計算區域各部之邊界條件分別為壁面、對稱、管流入口及出口，壁面及對稱邊界條件與一般常用的相同，至於管流上游入口處之邊界條件，則採用 Ling & Atabek[1]所提出之局部流理論，以數值積分法求出不同時間時入口處的速度分佈(見圖 1、2)，當作入口邊界條件的速度值。至於下游出口處之邊界條件為流場壓力與速度滿足一 traction free 之關係式，它代表下游出口處之流體不再受管壁之限制而形成一自由流(free surface flow)。

八、結果與討論

本研究針對頸縮管徑等加以模擬，在收斂條件與參數選取方面。由於要模擬的動脈血管內流場其壓力與速度在心臟收縮的過程中會有很大的變化；為了能夠較為精準的掌握流場之特性，虛擬壓縮因子取 $\beta=100$ 、收斂條件設定為 $TOL=10^{-5}$ ，每一物理時步內最大疊代次數目設定為 8000 次。

動脈血管流場模擬其各個物理參數之選取分別如下：

流場參考最大流速 $u_{max}=100 \text{ cm/s}$
流場參考壓力 100 mmHg

血液密度	1.0 g/cm^3
流場參考雷諾數	$Re=3000$
血管參考半徑	$R_o=0.6 \text{ cm}$
血管參考管長	$L_o=10D_o=12 \text{ cm}$
管壁參考厚度	$h_o=0.06 \text{ cm}$
管壁密度	1.3 g/cm^3
管壁楊氏係數	$8 \times 10^6 \text{ dyne/cm}^2$
壓縮與舒張一週期之時間	0.8 sec

為了兼顧計算效率及精確度，我們選取 127 x 17 之網格(圖 3)，無因次物理時間間隔 0.01；亦即一週期內之流場變化分成 100 步來計算。通常經過兩、三個週期計算後流場之週期變化會趨於穩定。

圖 3 即為頸縮管局部放大及全域之 127 x 17 網格分佈圖。以入口處之半徑為基準，頸縮段為 4 倍半徑長度，上、下游等管徑段長度為 8 倍半徑長度；頸縮段最大半徑減少量為 30%，面積減少量為 51%。除了在靠近邊牆附近採用較為密集之非等間距網格之外，在軸方向頸縮處(z 方向)預期流場變化較大的地方網格予以加密；而加密方式是採漸進式，加密的程度以穩態流之流速為判斷標準。圖 4 為頸縮管上、中、下游處於軸對稱位置上壓力隨時間之變化。圖 5 為頸縮管上、中、下游處截面軸向流量隨時間之變化。圖 6 為頸縮管上、中、下游處在各個時刻之速度分佈。由於頸縮處流速較快，使得在頸縮處其靠近牆上速度回流的流速沒有明顯減小；一但過了頸縮處繼續往下游則靠近牆上速度回流區亦會逐漸縮小。

圖 7 為頸縮管各時刻流場之瞬時流線圖。週期流從時間 $t=0$ 開始，此時於頸縮處後方存在一個回流區，此回流為上一週期於舒張段後期就一直存在的流體停滯現象。由於血小板在經過頸縮處之後會變成較為活化(active)之血小板，因此在回流區內較易產生血栓之情形。在時間 $t=0.1$ 時由於上游壓力及流速的增加，順道把頸縮處後方停滯之流體往下游帶走。於時間 $t=0.2$ 時由

於上游壓力梯度減緩導致流體流速的減緩，此時管壁的彈性效應作用仍持續將流體往下游推送。時間 $t=0.3$ 時上游壓力梯度再次增加將流體再度往下游加速推送。到了時間 $t=0.4$ 收縮期末端開始進入舒張期，此時心臟開始由收縮轉而舒張同時心臟瓣膜關閉避免血液之逆流，因此上游壓力及流體速度快速下降，造成流場內流體靠近壁面處有回流之現象。時間 $t=0.5$ 以後壓力及流速變化趨於緩和，此時動脈血管內靠著管壁的彈性收縮效應將血液繼續往下游推送。在此同時於頸縮處後方形成一個回流區，此回流區的流體停滯現象會一直存在於舒張段期間，直到下一個週期開始。

圖 8 為頸縮管上、中、下游處管徑位移量隨時間之變化。由於頸縮處管徑較小，在此處形成較大之阻力，造成上游心臟必須提供更大的壓力才能達到下游出口處相同的流場狀況。圖 9 為頸縮管上、中、下游處管壁壁上剪應力(wall shear)隨時間之變化。由於在頸縮處流速增大，因而管壁上剪應力變化亦跟著加大。隨著剪應力的增加造成血液中紅血球較易產生破裂現象。

九、結論

本研究以數值模擬脈衝流於動脈血管中之變化情形。對於所模擬之結果可獲至如下結論：

- (1)由於管壁的彈性效應、血液的黏滯效應等，愈往下游壓力變化之振幅變大，平均壓力則由於黏滯效應的消耗變小。
- (2)作用於管壁上之壓力為管壁運動位移最主要的影響因素。
- (3)由於頸縮處管徑較小，在此處形成較大之阻力，造成上游心臟必須提供更大的壓力才能達到下游出口處相同的流場狀況。
- (4)在頸縮處後方有回流區之出現，故較易產生血栓之情形。
- (5)頸縮處管壁的剪應力變化較大，使得血液中紅血球較易產生破裂現象。

數值模擬能夠任意更動模擬的物理參數，以

及快速地得到結果等，使我們能夠方便又迅速的分析各個參數對於流場的影響效應。在心血疾病發生的過程中往往存在著許多與流體及流場息息相關的現象。日後，冀望藉由數值計算模擬動脈血管流的方法能在心血疾病的診斷及成因的探討上作出一番貢獻。

誌謝

感謝國科會提供本研究所需之經費，國科會計劃編號 NSC 89-2212-E-002-144。

參考文獻

- [1] Ling, S. C., Atabek, H. B. "A nonlinear analysis of pulsatile flow in arteries," J. Fluid Mech., Vol. 55, pp. 493-511, 1972.
- [2] Perktold, K., Thurner, E., Kenner, Th. "Flow and stress characteristics in rigid walled and compliant carotid artery bifurcation models," Medical & Biological Engineering & Computing Vol. 32, pp. 19-26, 1994.
- [3] Tang, D., Yang, J., Yang, C., Ku, D. N. "A nonlinear axisymmetric model with fluid-wall interactions for steady viscous flow in stenotic elastic tubes," J. Biomech. Eng., Vol. 121, pp. 494-501, 1999.
- [4] Dutta, A. and Tarbell, J.M. "Influence of non-Newtonian behavior of blood on flow in an elastic artery model," J. Biomech. Eng., Vol. 118, pp. 111-119, 1996.
- [5] Rappitsch, G., Perktold, K. "Computer simulation of convective diffusion processes in large arteries," J. Biomechanics, Vol. 29, No.2, pp. 207-215, 1996.
- [6] Taylor, W. and Yamaguchi, T. "Three-dimensional simulation of blood flow in an abdominal aortic aneurysm – steady and unsteady flow cases," J. Biomech. Eng., Vol. 116, pp. 89-97, 1994.
- [7] Downing, J. M., Ku, D. N. "Effects of

frictional losses and pulsatile flow on the collapse of stenotic arteries," J. Biomech. Eng., Vol. 119, pp. 317-324, 1997.

- [8] Chorin, A.J. "Numerical solution of Navier-Stokes equations," Mathematics of Computation, Vol. 22, No. 104, pp. 745-762, 1968.
- [9] Harten, A. "High resolution schemes for hyperbolic conservation laws," J. Comp. Phy., Vol. 49, pp. 357-393, 1983.
- [10] Rogers, S.E., Kwak, D. and Kaul, U. "On the accuracy of the pseudocompressibility method in solving the incompressible Navier-Stokes equations," AIAA Paper, 85-1689, 1985.
- [11] Yoon, S. and Jameson, A. "An LU-SSOR scheme for the Euler and Navier-Stokes equations," AIAA Paper 87-0600, 1987.

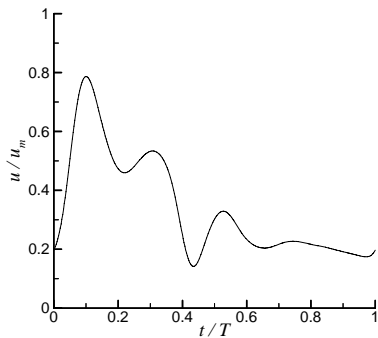


圖 1 入口處軸對稱位置速度隨時間之變化。

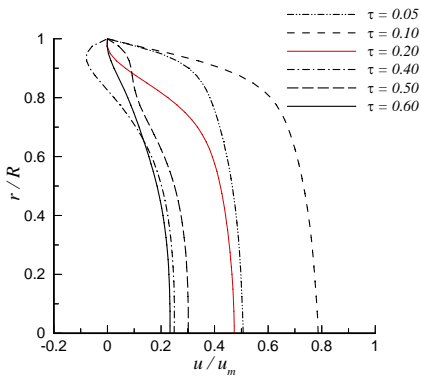


圖 2 入口處速度隨時間之變化分佈情形。

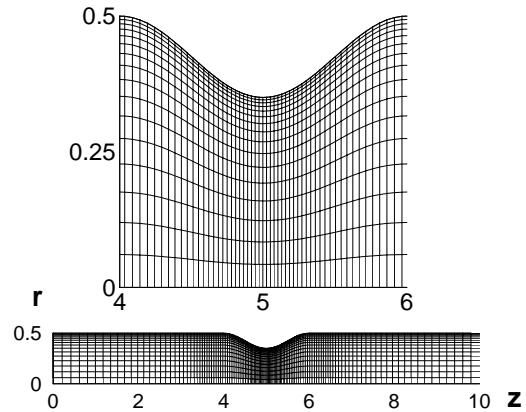


圖 3 127×17局部放大及全域之網格分佈圖。

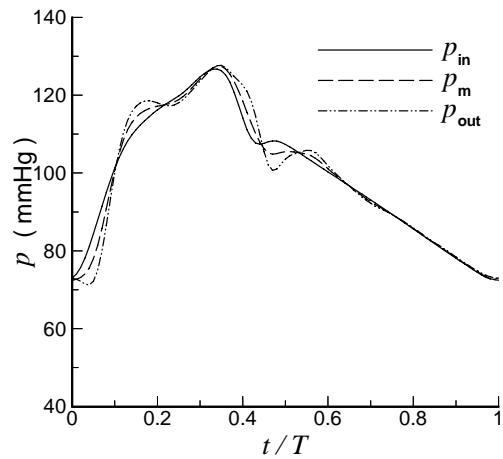


圖 4 上、中、下游軸對稱位置壓力隨時間之變化。

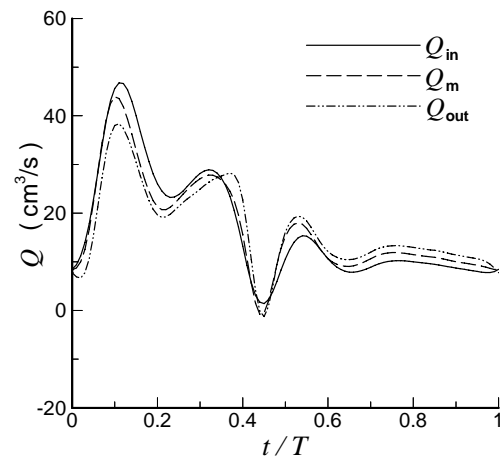


圖 5 上、中、下游截面軸向流量隨時間之變化。

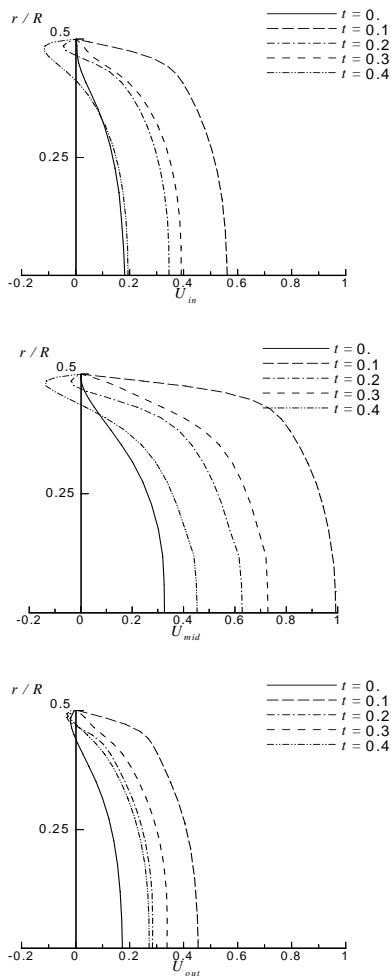


圖 6 上、中、下游在各個時刻之速度分佈。
 $t = 0.0$

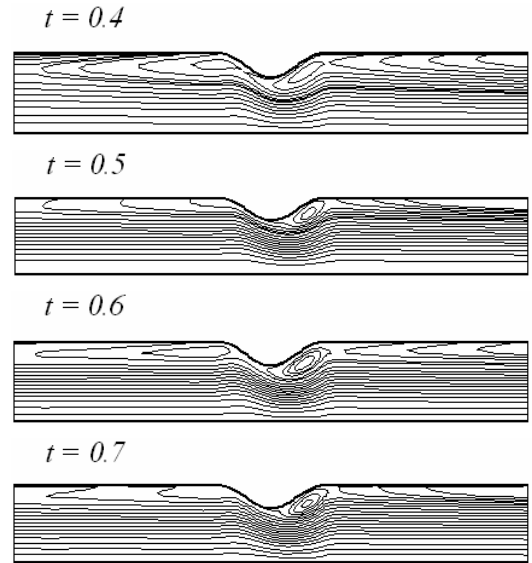
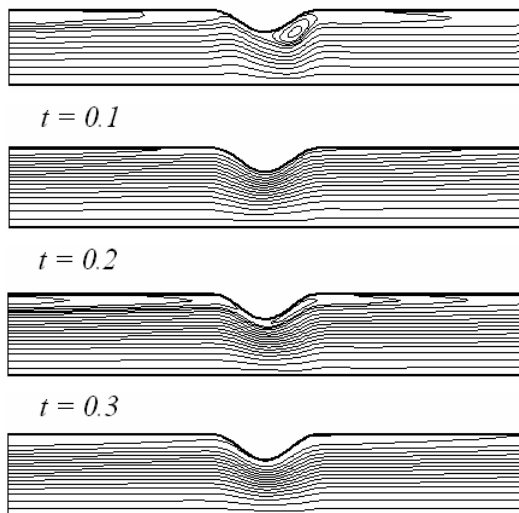


圖 7 各個時刻流場之流線圖。

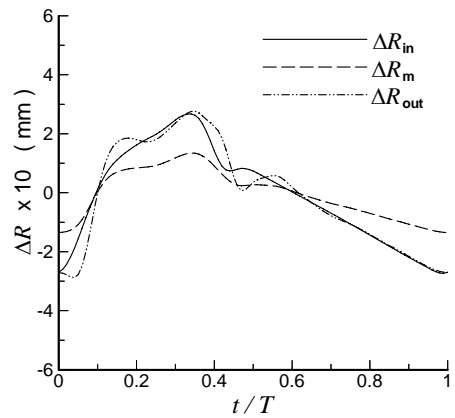


圖 8 上、中、下游管徑位移量隨時間之變化。

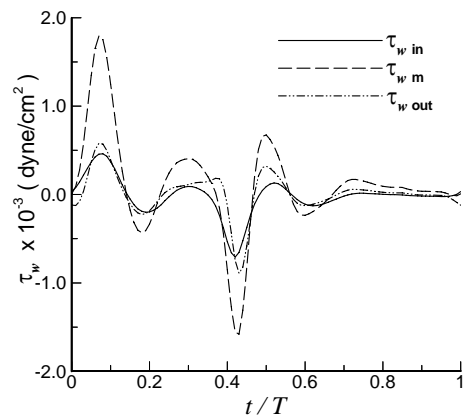


圖 9 上、中、下游管壁上剪應力隨時間之變化。