嘉南藥理科技大學教師補助專題研究計畫 ■ 成 果 報 告 □期中進度報告

整合型計畫：推估設限資料的未來失敗時間與數目

子計畫(1)在 weibull 分配下以 bayesian 方法估算設限資料的未來失敗數目

計畫類別：□ 個別型計畫　　■ 整合型計畫
計畫編號：CNMI －93－01－子計畫(1)
執行期間：　93 年 01 月 01 日至　　93 年 12 月 31 日

計畫主持人：陸海林　教授
共同主持人：
計畫參與人員：

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)：■精簡報告　□完整報告

執行單位：嘉南藥理科技大學資管系

中　華　民　國　93 年 2 月　25 日

推估設限資料的未來失敗時間與數目

在 **Weibull** 分配下以 **Bayesian** 方法估算設限資料的未來失敗數目

摘要

韋伯分配(Weibull distribution)被廣泛的應用在品質管制中可靠度的問題上，通常在設限資料下兩參數韋伯分配中參數的估計是較困難的，本文針對兩參數韋伯分配提供一個線性加權最小平方法估計參數。由此估計值來估算未來某特定時間內所發生之失敗數目。

關鍵詞： 韋伯分配、 加權最小平方法估計、次序統計量、蒙地卡羅模擬。

1. 緒論

通常韋伯分配廣泛的應用在可靠度與生命中存活壽命的研究領域中。如此之分配最先由 Weibull 於 1939[1]所提出，主要爲研究不同的損壞狀況可參考 Weibull 所作的論文[2]，其他也應用在鋼所產生的強度[3]，電子元件的損壞率－－－等等。機率密度函數與累積分配函數分別爲

$$f(x) = \beta\alpha^{-\beta}x^{\beta-1}\exp[-(\frac{x}{\alpha})^{\beta}]，$$

$$F(x) = 1-\exp[-(\frac{x}{\alpha})^{\beta}] \quad ，$$

其中 x>0 ， α>0， β>0 此兩母數分別當作尺度(scale)和形狀(shape)母數。

若 β>1 時韋伯分配的危險函數(hazard function)爲單調遞增(monotone increasing)， β<1時危險函數(hazard function)爲單調遞減(monotone decreasing)，β=1 時韋伯分配爲簡單的指數分配，近年很多學者欲估算未來某特定時間內所發生之失敗數目(參考 Nelson[4]，Nordman 和 Meeker[5]，後者採用以概似(Likelihood)爲基礎架構求出未來某特定時間內所發生之失敗數目的預估區間，前者採用以最大概似法(Maximum likelihood method)爲基礎架構先估算出α，β在由母數值與樣本數配合機率估算未來的失敗數目。

近來估算 α ，β 的文章包括的有 Bergman[6]；Faucher 和 Tyson[7]；Sinha 和 Guttman[8] ；Chandhuri 和 Chandra[9] ；Lockhart 和 Stephens[10] ；Hossain 和 Howlader[11]；Drapella 和 Kosznik[12] 與 Hung[13]。這篇文章之動機爲來自 Johnson *et al.* [14]所提的用母數與次序統計量之線性關係的近似法，來估算 α ，β 以及參考 Ananda *al.* [15]所提的適應性貝氏估計，其方式爲僅給事先分布一個參數，再利用使經驗分佈與累積分佈函數的距離最小來得到另一參數。以下精要說明兩種方法：

若令 T=－log(x)此 T 將具有極值分配(Extreme distribution)其 μ =－log(1/ α)，b=1/ β 分別爲位置與尺度母數

假設 X 爲兩參數極值分配機率密度函數與累積分配函數分別爲

$$f(x)=\frac{1}{\alpha}e^{\frac{x-\mu}{b}}e^{-e^{\frac{x-\varpi}{b}}}$$

$$F(x)=1-e^{-e^{\frac{x-\mu}{b}}}.$$

Then we have

$$\ln(-\ln(1-F(x)))=\frac{1}{b}x-\frac{\mu}{b}$$

$$\ln(Z_{(i)})=\frac{1}{b}x-\frac{\mu}{b},$$

其中 $h(Z_{(i)})=\ln(Z_{(i)})$ 。

再取 $w_i=\frac{1}{Z_{(i)}^2\,\mathrm{var}(Z_{(i)})}$ 爲加權(weight)用最小平方法求估 μ ，b，再轉成 α ，β 。

若 X1 表示到時間 t 時失敗的數目，X2 表示到時間 t 與 s 時的失敗的數目(t<s)， X3 表示到時間 s 時的未失敗的數目，則(X1，X2，X3)有一三度分配相關的機率爲(p、q、r)，其中 X1+X2+X3=n，p+q+r=1。

我們可能求的

$$p=1-\exp[-(\frac{t}{\alpha})^{\beta}]$$

$$q=\exp[-(\frac{t}{\alpha})^{\beta}]-\exp[-(\frac{s}{\alpha})^{\beta}]$$

$$r=\exp[-(\frac{s}{\alpha})^{\beta}]$$

其相關之預估值 $\hat{Y}=n\hat{q}$ ，其信賴區間可依 q 的區間估計而得。

另由 Bayesian 方式取 $\lambda=\frac{1}{\alpha^{\beta}}$ 得 $f(x)=\beta\lambda x^{\beta-1}\exp[-\lambda x^{\beta}]$ ，令 λ 的事先分配(prior distribution) 取 gamma distribution $g(\lambda)\propto\lambda^{c-1}\exp(-\lambda a)$ ，0≦ λ <∞，a，c>0 。再利用 Ananda *al.* [15]所提的適應性貝氏估計估算出參數的信賴區間，依前法可的 Y 的區間估計即爲未來的失敗數目的區間估計。

註：本文 WLSE 部份已投稿爲 Quality & Quantity (SCI)期刊接受並刊登在該期刊 2004，20；579-586。

參考文獻

[1] Wiebull W. A statistical theory of the strength of material. *Ingeniors Vetenskaps Akakemien Handlingar* 1939；**15**:293-297.

[2] Weibull W. A statistical distribution of wide applicability. Journal of Applied Mechanics 1951; **18**:293-297.

[3] Rao, S.S. *Reliability based design*, McGraw-Hill, Inc., U.S.A. (1992).

[4] Nellson W. Weibull prediction of a future number of failures., *Quality and Reliability Engineering International*, **16**, 23-26(2000)..

[5] Nordman D. J., and Meeker W. Q. Weibull prediction intervals for a future number of failures., *American Statistical Association and the American Society for Quality, Technometrics*, 2002, Vol 44, No. 1,15-23.

[6] Bergman B. “Estimation of Weibull parameters using a weight function”, *Journal of Materials Science Letters*, **5**, 611-614(1986).

[7] Faucher B., and Tyson W.R. "On the determination of Weibull parameters", *Journal of Materials Science Letters*, **7**, 1199-1203(1988).

[8] Sinha SK, Guttman I. Bayesian analysis of life-testing problems involving the Weibull distribution. Communications in Statistics-Theory and Methods 1988; 1792):343-356.

[9] Chaudhuri AR, Chandra NK. A test for Weibull population. Statistics and Probability Letters 1989;7(5):377-380.

[10] Lockhart RA., Stephens MA., Estimation and tests of fit for the three-parameter Weibull distribution. Journal of the Royal Statistical Society, Series B 1994; 56(3); 491-500.

[11] Hossain A, Howlader HA. Nweighted least-squares estimation of Weibull parameters. Jounal of Statistical computation and Simulations 1996; 54;265-271.

[12] Drapella A., and Kosznik S. "An alternative rule for placement of empirical points on Weibull probability paper", *Quality and Reliability Engineering International*, **15**, 57-59(1999).

[13] Hung W. L. “Weight least-squares estimation of the sharp parameter of the Weibull distribution”, *Quality and Reliability Engineering International*, **17**, 467-469(2001).

[14] Johnson NL., Kotz S, Balakrishnan N., Continuous Univeriate Distributions-I(2nd edn), Wiley: New York, 1994.

[15] Ananda M.M., Dalpatadu, R.J.D. and Singh A.K. Adaptive Bayes estimators for parameters of Gompertz survival model. Appl. Math & computation.,1996: 75,165-177.