行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

對可靠度系統中之元件在不同分配下預估信賴區間

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC94-2213-E-041-001-
執行期間：94 年 08 月 01 日至 95 年 07 月 31 日
執行單位：嘉南藥理科技大學資訊管理系

計畫主持人：陸海林

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 95 年 10 月 11 日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫 ■ 成 果 報 告 □期中進度報告

（計畫名稱）

對可靠度系統中之元件在不同分配下預估信賴區間

計畫類別：■ 個別型計畫　　□ 整合型計畫
計畫編號：NSC　94－2213－ E －041－001
執行期間：　94 年　07 月　01　日至　95　　年　08　月　31　日

計畫主持人：陸海林
共同主持人：
計畫參與人員： 鐘宜芳、謝宜庭

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)：■精簡報告　□完整報告

本成果報告包括以下應繳交之附件：
□赴國外出差或研習心得報告一份
□赴大陸地區出差或研習心得報告一份
□出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
□國際合作研究計畫國外研究報告書一份

處理方式：除產學合作研究計畫、提升產業技術及人才培育研究計畫、列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢
□涉及專利或其他智慧財產權，■一年□二年後可公開查詢

執行單位：

中　華　民　國　95　年　10　月　1　日

對可靠度系統中之元件在不同分配下預估信賴區間

中文摘要

本篇論文對於指數、羅吉斯、韋伯等分配中，樣本數為 n 之多元型二設限資料，提供一個合適的基準量，推估未來第 j 個次序觀測值的預測區間。除此我們也討論在相同的問題下的其他方法的預測區間如簡單近似預測區間、最佳線性不偏法的預測區間與近似最大概似法的預測區間。在實務上，於 j-out-of-n 的系統上對故障時間與系統之壽命均可推估其預測區間。最後，並提供三個例子來解釋明本文方法。

關鍵詞：預測區間，基準量，多元型二設限資料

ABSTRACT

This paper provides a suitable pivotal quantity to present the prediction interval of the j th future ordered-observation in a sample of size n from exponential、logistic and weibull distribution in case of a type II censored sample. In addition, we also discuss the approximate prediction interval, the best linear unbiased estimate and approximate maximum likelihood estimate of x_j based on the censored sample. As in applications, the total duration time in a life test and the failure time of a j-out-of-n system may be predicted. Finally, a simulated study and three illustrative examples are included.

Keywords: prediction, pivotal, multiply type II censored samples.

1、 前言

在工業、醫學等等許多應用領域上，於進行存活試驗中，對尚未被觀察到的個體資料，常常需要估計其信賴區間，來提供研究上的評估與分析，有許多論文對如此預估的問題，提供了許多的解決方法，如 Fertig, Meyer 和 Mann(1980), Lawless(1982), Balakrishnan 和 Cohen(1991), Balakrishnan etc.(1995) 等等，大部分均依照次序統計量，利用分配的一些性質，提供了未來觀察值的預估的信賴區間。

本計劃針對逐步型二設限資料(II censoed data)上，依照次序統計量在不同型式的分配上 ，依分配的性質以及觀察值的位置，分別提出一些基準量（pivotal quantity），配合這些基準量，建構出合適的統計量(請參考計畫英文摘要後之研究方法附件)，求出未來觀察值的預估信賴區間，同時我們也討論逐步設限各種不同的隨機移除(如:一般的隨機移除、一致性的移除與二項式移除)的資料，提供相似的方法加分析與討論。

對於我們所提供之方法，需要作可行性評估，本文針對不同分配在設限資料下對以往的方法，如最佳線性不偏估計法(Best linear unbiased estimation)、最大概似法(Maximum likelihood estimation)與近似最大概似法(Asymptotic maximum likelihood estimation)做比

較，預估採用我們使用的統計量在評估上會有較佳的結果表現。應用在寿命實驗的 sequential k-out-of-n 系統上也是可以預期的。

2、 文獻探討

Fertig, Meyer 和 Mann(1980), Lawless(1982), Balakrishnan 和 Cohen(1991), Balakrishnan etc.(1995) 等等，大部分均依照次序統計量，利用分配的一些性質，提供了未來觀察值的預估的信賴區間

3、 研究方法

本計劃針對型二設限資料(type II censoed data)，依照次序統計量在指數(Exponential)、對數(Logistic)、韋伯(Weibull)等分配上，依分配的性質以及觀察值的位置，分別提出一些基準量（pivotal quantity)，配合這些基準量，建構出合適的統計量(請參考計畫英文摘要後之研究方法附件)，求出未來觀察值的預估信賴區間，也可處理更複雜的多重設限資料架構(Upadhyay etc.(1996))。

本計劃初步可以很容易的應用在 k-out-of-n 的可靠度問題上，Cramer and Kamps (1998a, 1998b, 2000) 提出 Sequential k-out-of-n systems 的架構，本計劃亦將可推衍到運用其架構上探討。

對數常態(Lognormal)、柏拉圖(Pareto)等分配，在不同的設限資料架構下，求出未來觀察值的預估信賴區間，今以指數分配來說明：假設有 n 個元件在試驗中，其中最先的 r 個、中間的 m 個、和最後的 s 個元件因種種原因無法被觀察到，也就是說有

$X_{(r+1)} < X_{(r+2)} < \cdots < X_{(r+k)}$ 和 $X_{(r+k+l+1)} < X_{(r+k+l++2)} < \cdots < X_{(n-s)}$ 可被觀察到與可被使用。我們採用以下的基準量

$$\hat{U}_t = \frac{X_{(j)} - X_{(n-s)}}{\hat{W}_t} \qquad n-s < j \le n \ , 1 \le t \le 4$$

其中

$$\hat{W}_1 = \sum_{i=r+2}^{r+k} \frac{f(EX_{(i)})}{S}(X_{(i)} - X_{(r+1)}) + \sum_{i=r+k+l2}^{n-s} \frac{f(EX_{(i)})}{S}(X_{(i)} - X_{(r+1)})$$

$$\hat{W}_2 = \sum_{i=2}^{r} \frac{f(EX_{(i)})}{\sum_{i=1}^{n} f(EX_{(i)})}(X_{(r+2)} - X_{(r+1)}) + \sum_{i=2}^{k} \frac{f(EX_{(i)})}{\sum_{i=1}^{n} f(EX_{(i)})}(X_{(r+i)} - X_{(r+1)})$$
$$+ \sum_{i=r+k+1}^{r+k+l} \frac{f(EX_{(i)})}{\sum_{i=1}^{n} f(EX_{(i)})}(X_{(r+k)} + X_{(n-s)} - 2X_{(r+1)})/2 + \sum_{i=r+k+l2}^{n-s} \frac{f(EX_{(i)})}{\sum_{i=r+k+l+2}^{n-s} f(EX_{(i)})}(X_{(i)} - X_{(r+1)})$$

$$\hat{W}_3 = \prod_{i=r+2}^{r+k}(X_{(i)} - X_{(r+1)})^{\frac{f(EX_{(i)})}{S}} + \prod_{i=r+k+l+2}^{n-s}(X_{(i)} - X_{(r+1)})^{\frac{f(EX_{(i)})}{S}}$$

$$\hat{W}_4 = \prod_{i=1}^{r}(X_{(r+2)} - X_{(r+1)})^{\frac{f(EX_{(i)})}{\sum_{i=1}^{n} f(EX_{(i)})}} \prod_{i=r+1}^{r+k}(X_{(r+i)} - X_{(r+1)})^{\frac{f(EX_{(i)})}{\sum_{i=1}^{n} f(EX_{(i)})}}$$

$$\times \prod_{i=1}^{r}(X_{(r+k)} - X_{(n-s)} - 2X_{(r+1)})/2)^{\frac{f(EX_{(i)})}{\sum_{i=1}^{n} f(EX_{(i)})}} \prod_{i=n-s+1}^{n}(X_{(n-s)} - X_{(r+1)})^{\frac{f(EX_{(i)})}{\sum_{i=1}^{n} f(EX_{(i)})}}$$

S= $\sum_{i=r+1}^{r+k} f(EX_{(i)}) + \sum_{i=r+k+l+1}^{n-s} f(EX_{(i)})$ ，f 為標準指數分配(μ =0, σ =1)。

4、 結果與討論

對於兩參數的指數分配，我們所提供的統計量$\hat{U}_t$(1,--,4)是與參數無關，為一基準量，

其中分母的$\hat{W}_1$與$\hat{W}_2$以算術平均數的觀念相似(Wu etc.(2004))對柏拉圖(Pareto)所提概念，然而我們不認為每一個點有相同之權重(weight)，故依每個資料點一其機率值給與不同之權重，Wu etc.(2004))對柏拉圖(Pareto)用相同之權重所得統計量，在其評估下其未來觀察值的預估信賴區間之表現優於以往所作之方法，我們的方法應會有更佳的結果。做適當的處理我們的方法對極值(Extreme value)、對數常態(Lognormal)等分配也能適用。

我們也提出模擬的方式，評估下其未來觀察值的預估信賴區間之與以往作者所作之傳統方法。相關研究領域的實務例子也將提供並解釋新方法。也用 SPARK 語言提供一個簡單的演算法。

5、 成果自評

目前對於本計劃中指數方面的論文有兩篇分別刊登在 Journal of Chinese Institute of Industrial Engineers (2006)、International Journal of Information and Management sciences(2006)。對於羅吉斯分配方面的論文有一篇已被 Journal of Statistical Computation and Simulation 期刊所接受。

6、 誌謝

本研究承蒙行政院國家科學委員會補助研究經費(計劃編號:NSC 94－2213－ E －041－001

7、 參考著作

Balakrishnan, N. and Basu, A.P. (1995)*The Exponential Distribution: Theory Methods and Applications*, Canada:Gorden and Breach.

Balasooriya, U. and Chan, L. K. (1983).The prediction of future order statistics in the two-parameter Weibull distribution ：A robust study. Sankhya, series B.45, 320-329.

Childs, A., Sultan, KS, Balakrishnan, N.,(2000)Bayes 2-sample prediction for the inverse Weibull distribution. Commun. Statist. Theory Methods 23 (6), 1811-1824.

Cramer,E. and Kamps
, U(1998a). Maximum likelihood estimation with different sequential k-out-of-n systems. In W. ahle, E. von Collani, J. Franz and U. Jensen, eds., Advanced in stochastic Models for Reliability, Quality and Safety, 101-111, Boston. Birkhauser.

Cramer,E. and Kamps, U(1998b). Sequential k-out-of-n systems with Weibull components. Econom. Quality control 16, 227-239.

Cramer,E. and Kamps, U(2000).Estimation with sequential order statistics from exponential distribution. Ann. Inst. Statist. Math. To appear.

Fertig, K. W., Meyer, M. E., and Mann, N. R. (1980).On constructing prediction intervals for samples from a Weibull or Extreme Value Distribution.

Kaminsky, K.S. and Nelson, P. I. (1974)Prediction intervals for the exponential distribution using subsets of the data, *Technometrics*, **16**, 57-59.

Lawless, J. F.(1971)A prediction problem concerning samples from the exponential distribution,with application to life testing, *Technometrics*, *13*, 725-730 .

Wu Jong-Wuu , **Lu Hai-Lin**, Chong-Hong Chen and Chien-Hui Yang (2004) "A note on the prediction intervals for a future ordered observation from a Pareto distribution", Quality and Quantity, **38**, 217-233.

Lu, Hai-Lin, (2004)"Prediction Interval of an Order observation from one parameter Exponential distribution based on multiple type II ",(Journal of Chinese Institute of Industrial Engineers . Vol 21, No 5, 494-503.

Takada, Y.(1979) The shortest invariant prediction interval for the largest observation from the exponential distribution, *Journal of the Japan Statistical Society*, **9**, 87-91.

Upadhyay, S. K., Singh, U. and Shastri, V.(1996) Estimation of exponential parameters under multiply type II censoring, *Communication Statistical Simulation*, **25**(3), 801-815.

Wu, Tsi-Weich ,Lu Hai-Lin (2006) "An alternative method for prediction intervals of an order observation from one-parameter exponential distribution based on censored sample"" ,Journal of Chinese Institute of Industrial Engineers . Vol 23,No. 1,pp80-90.

Lu Hai-Lin, Wu, Tsi-Weich (2006) "An Alternative method for prediction intervals of an order observation from exponential distribution based on censored samples" , International Journal of Information and Management sciences,Vol 17,N.O. 2, 85-100.

Wu, Tsi-Weich ,Lu Hai-Lin (2006) Prediction intervals of an order observation from Logistic distribution based on censored samples. Journal of Statistical Computation and Simulation (Accept).