嘉南藥理科技大學專題研究計畫成果報告

An modified weighted nonlinear least-square estimation of three-parameter Weibull distribution

計畫類別：☑個別型計畫　　□整合型計畫

計畫編號：CNMI92-03

執行期間：92 年 1 月 1 日至 92 年 12 月 31 日

計畫主持人：陸海林

共同主持人：吳宜璈

計畫參與人員：

執行單位：資管系

中華民國　92　年　2　月　21　日

以修正之非線性加權最小平方法估計三參數之韋伯分配

陸海林

嘉南藥理科技大學資訊管理系

摘要

韋伯分配被廣泛的應用在品質管制中可靠度的問題上，通常三參數韋伯分配中參數的估計是較困難的，本文針對三參數極值分配提供一個修正的非線性加權最小平方法估計參數。由模擬的結果顯示這新的方法較以往的估計方法更有效也更方便，同時也是非常容易理解的方法。

關鍵詞：三參數韋伯分配、修正的加權最小平方法估計、次序統計量、蒙地卡羅模擬。

1. 緒論

通常韋伯分配應用在描述由故障所產生現象，而如此的故障是由一序列隨機變數的最小值與最大值所決定。韋伯分配與極值分配可互換，爲了簡單化以極值分配處理。由於所謂最小值與最大值的極值分配觀念可以用一個簡單的過程說明它。 假設隨機變數 X 表示鋼所產生的強度，首先對 n 個鋼材做強度的試驗，獲得 $X'_i, i=1,2,\cdots,n$,將此 n 個資料由大到小順序排列，其中最小值記爲 $X'_{(1)}$ ，最大值爲 $X'_{(n)}$ 。 再對另外 n 個鋼材做強度的試驗，獲得 $X''_i, i=1,2,\cdots,n$, 再將此 n 個資料由大到小順序排列，其中最小值記爲 $X''_{(1)}$，最大值爲 $X''_{(n)}$。 如此繼續重覆以上過程，可得 $X''_{(1)}, X''_{(1)}, \cdots, X^{n}_{(1)}$; $X'_{(2)}, X''_{(2)}, \cdots, X^{n}_{(2)}$; $X'_{(n)}, X''_{(n)}, \cdots, X^{n}_{(n)}$。若我們僅分別對最小值 $(X'_{(1)}, X''_{(2)}, X'''_{(3)}, \cdots)$ 與最大值 $(X'_{(n)}, X''_{(n)}, X'''_{(n)}, \cdots)$ 所成的資料集求其合適的對應分配爲 $F_{X_{(1)}}(x)$ -稱爲最小值的極值分配，$F_{X_{(n)}}(x)$ -稱爲最大值的極值分配。Gumbel [15]和 Epstein

[13] 已經將不同類型的極值分配運用到工程中可靠度的問題上，如因材料疲乏而斷裂、絕緣體的剝落、金屬製品的腐蝕等狀態所產生的故障問題。並且對於大部份可靠度的問題考慮它們材料中最弱強度時，可用最小值的極值分配來描述。然而，由於地震、風速、陣風或海浪所產生的最大負荷(載)量方面的研究，Rao [17]曾用最大值的極值分配來描述。極值分配有三種不同的型式，在本文中主要針對廣泛運用在可靠度上的型三極值分配 (Extreme Value Type III) 中參數的估計。通常二參數的型三極值分配已被廣泛的討論，故我們考慮更一般性的三參數的型三極值分配。對於三參數的極值分配的參數估計往往是非常麻煩的，一般所使用的最大概似估計量(Maximum likelihood estimator：MLE)往往是不存在的，甚至局部的最大概似估計量 (Local maximum likelihood estimator：LMLE) 也常會不存在 (Cohen, Whitten 和 Ding[9])。另外常用的動差估計量 (Moment estimator：ME) 雖然在計算方面是很容易，但是有時它並未完全利用到所有可用的樣本資訊，而且其估計的結果所產生的變異往往也太大些。所以 Chan，Cohen 和 Whitten[4]; Cohen，Whitten 和 Ding[9]; Cohen 和 Whitten ([5]，[6]，[7])等作者用相似的修正的動差估計量 (Modified moment estimators：MME) 與修正的最大概似估計量 (Modified maximum likelihood estimator：MMLE)，分別討論不同的三參數分配-如三參數的逆高斯分配 inverse Gaussian distribution)，三參數的對數常態分配 (lognormal distribution)，三參數的伽瑪分配 (Gamma distribution) 與三參數的韋伯分配 (Weibull distribution)。 對於這些估計量，Smith [18]認爲在大部分的狀況下 MME 與 MMLE 爲最佳的估計量。然而 MMLE 於估計時仍會發生 MLE 所遇到的同樣問題，又在計算 MME 時，最方便的是依以上作者們所建立的表來估算參數值，但是所建立的表並不能完全涵蓋所有樣本的情況，這是其瑕疵。 故我們提供一個替代的方法，雖然也建議用修正方法，但是採用非線性最小平方法與非線性加權最小平方法分別來估算這些參數。對於以上所提的動差估計量，修正的動差估計量與本文所建議方法之細節描述在第二節，一個模擬研究評估所提方法的可行性描述在第三節，最後做一個簡短的討論。

2. 研究方法的建立

最小值的型三極值分配可以經變數的轉換而成應用非常廣泛的韋伯分配，故本文只考慮

對最大值的三參數型三極值分配中參數的估計，事實上,以下所採用的方法可以稍微的加以修改後便能適用到其它型式的極值分配。關於最大值的三參數型三極值分配 (Rao[17])的機率密度函數與累積分配函數分別爲

$$f_X(x) = \frac{\beta}{\alpha}(-\frac{x-\mu}{\alpha})^{\beta-1}\exp[-(-\frac{x-\mu}{\alpha})^{\beta}] \tag{1}$$

and

$$F_X(x) = \exp[-(-\frac{x-\mu}{\alpha})^{\beta}]$$

其中 $x \le \mu,\ \alpha,\ \beta,$和 μ 爲三參數，且 $\alpha,\ \beta > 0$。

這些符號所代表的意義分別爲 μ 爲臨界參數 (critical) 或位置參數 (location)，α 爲尺度參數 (scale)，β 爲形狀參數 (shape)。

2.1. 動差估計量與修正的動差估計量(Moment Estimator and Modified Moment Estimator)

隨機變數 X 爲來自最大值的三參數型三極值分配，則其期望值，變異數和第三個標準動差分別爲

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu - \alpha\Gamma(1+\frac{1}{\beta}), \\ V(X) &= \alpha^2([\Gamma(1+\frac{2}{\beta}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\beta})]), \\ E(X^3) &= \alpha^3\Gamma(1+\frac{3}{\beta}) - 3[\alpha^2\Gamma(1+\frac{2}{\beta}) - 2\mu\alpha\Gamma(1+\frac{1}{\beta}) + \mu^2][\mu - \alpha\Gamma(1+\frac{1}{\beta})] \\ &\quad + 2[\mu - \alpha\Gamma(1+\frac{1}{\beta})]^3, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\Gamma(v) = \int_0^\infty t^{v-1}e^{-t}dt$ 。

合理的採用樣本的觀察值使得 $E(X) = \bar{x}, V(X) = s^2$ 和 $E(X^3) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3$ ；其中 $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$, $s^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/(n-1)$，$n$ 爲樣本個數。將 (2) 式當成估計方程式，可以獲得三個參數的估計量。如此的估計量稱爲動差估計量。

對於本文所提的分配，修正的動差估計量是依最大次序統計量 (the largest order statistic) $X_{(n)}$，配合 (2) 式可以得到以下估計方程式

$$\mu-\alpha\Gamma(1+\frac{1}{\beta})=\bar{x},$$
$$\alpha^2[\Gamma(1+\frac{2}{\beta})-\Gamma^2(1+\frac{1}{\beta})]=s^2, \tag{3}$$
$$\mu-\alpha/n^{1/\hat{\beta}}\Gamma(1+\frac{1}{\beta})=x_{(n)}.$$

經過簡單的代數運算處理，方程式 (3) 可以化成

$$\frac{(x_{(n)}-\bar{x})^2}{s^2}=\frac{[(1-n^{-1/\hat{\beta}})\Gamma(1+\frac{1}{\hat{\beta}})]^2}{\Gamma(1+\frac{2}{\hat{\beta}})-\Gamma^2(1+\frac{1}{\hat{\beta}})},$$
$$\hat{\alpha}=\frac{x_{(n)}-\bar{x}}{(1-n^{-1/\hat{\beta}})\Gamma(1+\frac{1}{\hat{\beta}})}, \tag{4}$$
$$\hat{\mu}=\frac{n^{1/\hat{\beta}}x_{(n)}-\bar{x}}{n^{1/\hat{\beta}}-1}$$

由於從樣本資料可以直接獲得 $\bar{x}$, s 和 $x_{(n)}$ 的值，只要解 (4) 式中的第一個方程式，便可以求得 β 的估計量 $\hat{\beta}$，接著將 $\hat{\beta}$ 代入 (4) 式的第 2 與 3 個方程式立即可求得 $\hat{\alpha}$，與 $\hat{\mu}$。如此所求得的估計量稱爲修正的動差估計量。

以下介紹本文所建議的一個新的方法，我們將這些方法分成非線性最小平方法與非線性加權最小平方法兩部份來討論。

2.2 非線性最小平方法(Nonlinear Least Square Method)

令 R=－X ，則 R 的累積分配函數爲

$$F_R(r)=1-\exp(-(\frac{r+\mu}{\alpha})^{\beta})$$

重寫上式得

$$\ln(-(1-\ln(F_R(r))))=\beta\ln(r+\mu)-\beta\ln\alpha,$$

即

$$\ln(-(1-\ln(F(-X))=\beta\ln(-X+\mu)-\beta\ln\alpha. \tag{5}$$

令 $Y_i=\ln(-(1-\ln(F(-X_i)))$, $T_i=\ln(-X_i+\mu)$.

若 μ 已知時，Y_i 是 T_i 的線性函數，此時可以用簡單的線性最小平方法求得 α 與 β 估計值。若 μ 未知時，則 Y_i 是 T_i 的非線性函數，並且含有三個未知數。本文對求解此非線性最小

平方法的做法為：首先將隨機樣本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 由小到大排序成 $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}$，且利用 (4) 式，則 (5)式可以改成

$$Y_{(i)} = \beta \ln(-X_{(i)} + \frac{X_{(n)} n^{1/\beta} - \overline{X}}{n^{1/\beta} - 1}) - \beta \ln \alpha, \tag{6}$$

上式簡化成只有二個未知數 α 與 β，此時 $Y_{(i)}$ 的資料為 $\ln(-(1-\ln F(-X_{(i)})))$， 其中對於 $F(X_{(i)})$ 採用估計量 $\hat{F}(X_{(i)})$ 如下式

$$\hat{F}(X_{(i)}) = \frac{i-c}{n-2c+1}, \quad 1 \le i \le n$$

其中 0 < c < 1。(參考 David [10])

本文中用此估計量 $\hat{F}(X_{(i)})$ 估計參數時 c 分別取 0, 0.3, 0.5, 0.75. 特別是當 c = 0.5 與 0.3 時分別稱為平均數秩 (Mean rank) 和中位數秩 (Median rank)。 用如此的 $Y_{(i)}$ 與 $X_{(i)}$ 實施非線性最小平方法來估計參數，為簡單化將此方法記為 NOLS。

另外由於 $-\ln(1-F(-X_{(i)}))$ 具有標準指數分配 [1]，令 $Z_{(i)} = -\ln(1-F(-X_i))$，並且 $Z_{(i)}$ 的期望值為

$$EZ_{(i)} = \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{n-j+1} \tag{7}$$

在 (6) 式中的 $Y_{(i)}$ 此時可以取 $\ln Z_{(i)}$，同時在計算中取 $EZ_{(i)}$ 作為 $Z_{(i)}$ 的值，利用 $Y_{(i)} = \ln EZ_{(i)}$ 與 $X_{(i)}$ 的資料型態同樣的實施非線性最小平方法估計參數，如此的方法簡記為 EOLS。

2.3 非線性加權最小平方法(Nonlinear Weighted Least Square Method)

Bergman [2] 討論在兩參數的韋伯分配中，實施簡單迴歸分析估計兩參數時，強調每一資料點應有不同的權重 (Weight)，故實行最小平方法時,應於每一資料點加上合理的加權因子 (Weight factor)。 Faucher 和 Tyson [14]， Drapella 和 Kosznik [12]， Hung [16]等作者也分別提出不同的加權因子，利用最小平方法來估計兩參數的韋伯分配中的參數。然而韋伯分配可以經過變數轉換而形成最小值的極值分配，所以依上節所使用的非線性最小平方法，對於 (6) 式中的每一個資料 $x_{(i)}$ 均假設有相同的加權，也並不是很適宜的，所以本文同樣的也建議採用加權最小平方法來執行方程式 (6) 來估算參數，而所採用的加權因子並不同於以往的作者在兩參數的韋伯分配中所建議的加權因子。本文所建議採用的加權最小平方法，其原理與

細節如下：由於在上一小節中， $Z_{(i)} = -\ln F(X_i)$ 具有標準指數分配。 令 $h(Z_{(i)}) = \ln(Z_{(i)})$，$Z_{(i)}$的平均數如 (7) 式，而其變異數(參考 Balakrishnan and Cohen [1])爲

$$Var(Z_{(i)}) = \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{(n-j+1)^2}$$

Bickel 和 Doksum [3]所著書中，討論變異數穩定性的轉換 (Variance stabilizing transforms) 的問題，本文利用其觀念建議採用的加權因子爲

$$\omega_i = \frac{1}{Var(h(Z_{(i)}))} \cong \frac{[h'(Z_{(i)})]^2}{Var(Z_{(i)})} = \frac{1}{Z_{(i)}^2 Var(Z_{(i)})} \cong \frac{1}{(EZ_{(i)})^2 Var(Z_{(i)})}$$

也就是說，此重量最小平方法仍是在求得下列平方和爲最小的架構下，以估計所欲求的參數。

$$Q = \sum_{j=1}^{n} \omega_i (Y_i - Y_i(x_i))^2,$$

其中 Y_i 取 (7)式中 Z_i 的估算量 EZ_i 之自然對數 $ln(EZ_i)$，$Y_i(x_i)$爲 (6) 式中等號右邊的式子。以上的方法稱爲非線性加權最小平方法, 簡單的記爲 EWLS。

3. 模擬研究與結果

針對本文所提 NOLS 與 EOLS 兩種非線性最小平方法，與本文所強調的 EWLS 法，對其做可行性的評估是很需要的。本節討論 NOLS, EOLS 與 EWLS 三種方法與 MME 比較, 主要是判別本文所提方法是否較 MME 爲佳。Cohen, Whitten 和 Ding [9]宣稱在大部份狀況下 MME 爲最佳統計量，同時 Smith[18]也有相同之結論。 爲了達到以上的目的，一個模擬的研究是必要的。於此我們實施一個蒙地卡羅模擬研究 (Monte Carlo Simulation study)。其方法爲隨機產生 2000 組，每組樣本大小爲 100，每個樣本均爲來自極大值的三參數型三極值分配如 (1)式，在不失一般性下，其參數值分別取爲 $\mu = 0$，$\alpha = 1$，$\beta = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$ (這些值視爲真值)。爲了合理的判斷何種方法爲最佳，我們考慮偏差 (Bias) 與均方誤差 (Mean Square Error：MSE) 做爲評估的準繩，所謂偏差意指估計量與真值的差，但以均方誤差爲主要的判定方法。由於均方誤 $MSE_\beta = E(\hat{\beta} - \beta)^2 = E(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))^2 + (E(\hat{\beta}) - \beta)^2$，故均方誤差爲標準差的平方與偏差的平方之和，亦即均方誤差包含了偏差的性質。求 MSE 可將偏差與標準差合併考慮。故實際上本文主要以 MSE 爲評估估計量爲有效性之標準，以偏差爲輔。處理的方式爲，每一組樣本使用不同的估計方法分別求得估計量， 例如在 2000 組模擬資料

中，對參數β而言共有$\hat{\beta}^{(1)},\cdots,\ \hat{\beta}^{(2000)}$個估計量，其標準差 (Standard Deviation：*SD*) 與均方誤差分別爲

$$SD=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{\beta}^{(i)}-E(\hat{\beta}))^2},\qquad MSE=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\hat{\beta}^{(i)}-\beta_0)^2},$$

其中取 $E(\hat{\beta})=\bar{\beta}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\beta}^{(i)}$, β_0視爲真值（亦即原先模擬所取的β 值)，N = 2000。

同樣的，其他的參數μ與α也可以用相同的處理方法計算 *SD*與*MSE*。

這些模擬的結果分別列於表 1.與表 2.中，由於 *SD*與*MSE*的差異甚小，故僅列 *MSE*，其中表 1. 列出各種方法的*MSE*值，在第二節我們所提的各種修正法中，很明顯的 EWLS 法所求的 MSE 值較 NOLS 法（不論 c 爲何值）的要小，同樣的也較 EOLS 的 MSE 值要稍爲小。特別是不論所估的參數爲何，EWLS 法所求的 MSE 值均比 MME 法要顯著的小。表 2.列出各種方法的偏差值，雖然在β = 1.5 時，以 EWLS 所得μ之偏差爲稍大於 EOLS 及 NOLS（含 c = 0.3)，β = 2.5 時，EWLS 所得μ之偏差大於 EOLS，但是在其它β值時均以 EWLS 之μ的偏差爲最小，又β = 1.0 及 1.5 或 2.5 時 EWLS 估計β 之偏差大於 NOLS (c=0.3)及 EOLS，但是其它β 值以 EWLS 爲佳。又只有β = 2.5 時，EWLS 估計α時之偏差大於 NOLS（c = 0)及 EOLS，但是其它β 值亦以 EWLS 爲佳。無論如何在判別估計量之優劣時 MSE 同時結合標準差與偏差的觀念。本文提供的 EWLS 在 MSE 之判斷下確實時最佳的，而在偏差方面，在某些部份會較 NOLS (c = 0.3) 或 EOLS 較大。整體來看，若同時比較 NOLS (c = 0.3)，EOLS，EWLS 而言，以 EWLS 之 MSE 最小，並且大部份之偏差亦較 EOLS 與 NOLS（c = 0.3)爲低。

4. 討論

一般來說三參數的分配常常是很重要的，但是這些分配的估計往往也是甚爲麻煩，本文中針對最大值的三參數型三極值分配的參數估計，提供一個合理的修正非線性加權最小平方法，這新方法於模擬的結果較以往的方法要佳，雖然這新方法仍需要用重覆的運算程序，但是使用在一般的個人電腦上，均只需很短的時間便能立即獲得結果，對實際的問題，用一般的統計軟體，可以很容易的運用這新方法去求估計值，而且本文的方法不必查表計算，同時本文也建議在用重覆的運算程序求解時，其初始值可以利用簡易的動差估計值較佳。又

Cohen，Whitten 和 Ding ([8]，[9]); Cohen 和 Whitten ([5]，[6]，[7])提出的三參數的修正動差估計量的評估，其估計量具有不偏性 (Unbiased) 及有效性 (Efficient)，而本文所提之估計量在不偏性與有效性方面的評估，均優於修正動差估計量，故本文之估計量亦具有不偏性及有效性，故應是另一種合適且可採行的估計方法。雖然本文只是討論最大值的三參數型三極值分配的參數估計，事實上相似的其他的三參數分配如型一與型二的三參數極值分配等均可以採用這新的方法。

表 1.各估計量的 MSE

2000 個隨機樣本組,每組 100 個樣本來自極大值的三參數型三極值分配 $\mu = 0$，$\alpha = 1$。

		β					
參數	估計量	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
μ	MME	0.0000	0.0001	0.0014	0.0051	0.0141	0.0380
	NOLS(c=0)	0.0000	0.0001	0.0014	0.0053	0.0145	0.0312
	NOLS(c=0.3)	0.0000	0.0001	0.0014	0.0057	0.0151	0.0320
	NOLS(c=0.5)	0.0000	0.0001	0.0015	0.0059	0.0159	0.0333
	NOLS(c=0.75)	0.0000	0.0001	0.0015	0.0063	0.0184	0.0400
	EOLS	0.0000	0.0001	0.0015	0.0056	0.0142	0.0309
	EWLS	0.0000	0.0001	0.0013	0.0052	0.0123	0.0251
β	MME	0.0081	0.0138	0.0329	0.0710	0.2074	0.7197
	NOLS(c=0)	0.0021	0.0096	0.0318	0.0888	0.2371	0.5927
	NOLS(c=0.3)	0.0022	0.0096	0.00298	0.0969	0.2504	0.6017
	NOLS(c=0.5)	0.0021	0.0098	0.0337	0.0996	0.2803	0.6319
	NOLS(c=0.75)	0.0021	0.0105	0.0358	0.1139	0.3388	0.7974
	EOLS	0.0021	0.0101	0.0339	0.0948	0.2458	0.5876
	EWLS	0.0018	0.0080	0.0269	0.0769	0.1864	0.4321
α	MME	0.1057	0.0127	0.0077	0.0097	0.0188	0.0433
	NOLS(c=0)	0.0509	0.0120	0.0072	0.0100	0.0189	0.0364
	NOLS(c=0.3)	0.0523	0.0119	0.0075	0.0105	0.0197	0.0368
	NOLS(c=0.5)	0.0514	0.0117	0.0080	0.0107	0.0209	0.0386
	NOLS(c=0.75)	0.0542	0.0119	0.0074	0.0112	0.0244	0.0460
	EOLS	0.0455	0.0116	0.0076	0.0102	0.189	0.0358
	EWLS	0.0444	0.0119	0.0072	0.0092	0.0164	0.0289

表 2.各估計量的 BIAS

2000 個隨機樣本組,每組 100 個樣本來自極大值的三參數型三極值分配 $\mu = 0$，$\alpha = 1$。

		β					
參數	估計量	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
μ	MME	0.0005	0.0029	0.0065	0.0139	0.0152	0.0411
	NOLS(c=0)	0.0000	0.0001	-0.0019	-0.0029	0.0173	0.0217
	NOLS(c=0.3)	0.0000	0.0001	0.0000	0.0038	0.0100	0.0112
	NOLS(c=0.5)	0.0000	0.0012	0.0032	0.0045	0.0161	0.0266
	NOLS(c=0.75)	0.0001	0.0012	0.0058	0.0063	0.0251	0.0400
	EOLS	0.0000	-0.0001	-0.0002	-0.0029	0.0008	0.0166
	EWLS	0.0000	0.0001	-0.0007	0.0025	-0.0042	0.0077
β	MME	0.0577	0.0415	0.0592	0.0850	0.1095	0.2298
	NOLS(c=0)	-0.0085	-0.0202	-0.0406	-0.0590	-0.0572	-0.0505
	NOLS(c=0.3)	-0.0012	-0.0022	-0.0143	-0.0023	0.0158	0.0188
	NOLS(c=0.5)	0.0011	0.0103	0.0132	0.0160	0.0609	0.1003
	NOLS(c=0.75)	0.0062	0.0238	0.0447	0.0754	0.1300	0.1957
	EOLS	-0.0068	-0.0126	-0.0158	-0.0450	-0.0377	0.0111
	EWLS	-0.0049	-0.0138	-0.0193	-0.0146	-0.0424	0.0014
α	MME	0.1598	0.0146	0.0089	0.0144	0.0143	0.0410
	NOLS(c=0)	0.0492	0.0079	-0.0001	-0.0026	0.0016	0.0043
	NOLS(c=0.3)	0.0555	0.0102	0.0048	0.0050	0.0115	0.0100
	NOLS(c=0.5)	0.0500	0.0150	0.0112	0.0030	0.0156	0.0275
	NOLS(c=0.75)	0.0600	0.0169	0.0119	0.0171	0.0268	0.0370
	EOLS	0.0116	-0.0055	-0.0067	-0.0107	-0.0063	0.0100
	EWLS	-0.0046	-0.0050	-0.0054	-0.0034	-0.0099	0.0037

參考文獻

1. Balakrishnan N., and Cohen A. C. Order Statistics and Inference, page 35, Academic Press, Inc (1991).
2. Bergman B. “Estimation of Weibull parameters using a weight function”, *Journal of Materials*

Science Letters, **5**, 611-614(1986).

3. Bickel P.J., and Doksum K. A. “Mathematical Statistics - Basic Ideas And Selected Topics”, Vol. I, page 113. Prentice-Hall, Inc(2001).
4. Chan,M., Cohen, A. C., and Whitten, B. J. “Modified maximum likelihood and modified moment estimators for the three-parameter inverse Gaussian distribution”, *Communication Statatistical Simulation Compution*, **13**, 47-68(1984).
5. Cohen, A. C., and Whitten, B. J. "Modified moment estimation for the three-parameter inverse Gaussian distribution", *Journal of Quality Technology*, **17**, 147-154(1985).
6. Cohen, A. C., and Whitten, B. J. "Modified moment estimation for the three-parameter gamma distribution", *Journal of Quality Technology* , **18**, 53-62(1986).
7. Cohen, A. C., and Whitten, B. J. *Parameter Estimation in Reliability and Life Span Models* , Marcel Dekker, New York(1988).
8. Cohen, A. C., Whitten, B. J., and Ding, Y. “Modified moment estimation for the three-parameter Weibull distribution”, *Journal of Quality Technology*, **16**, 159-167(1984).
9. Cohen, A. C., Whitten, B. J., and Ding, Y. “ Modified moment estimation for the three-parameter lognormal distribution”, *Journal of Quality Technology*, **17**, 92-99(1985).
10. David, H.A. *Order statistics*, Second edition, Wiley, New York, (1981).
11. D’Agostino R. B., Stephens M. A. *Goodness-of-fit Techniques*, Marcel Dekker, Inc., New York(1986).
12. Drapella A., and Kosznik S. "An alternative rule for placement of empirical points on Weibull probability paper", *Quality and Reliability Engineering International*, **15**, 57-59(1999).
13. Epstein, B., "Elements of the theory of Extreme values", *Technometrics*, Vol 2., No. 1, February (1960).
14. Faucher B., and Tyson W.R. "On the determination of Weibull parameters", *Journal of Materials Science Letters*, **7**, 1199-1203(1988).
15. Gumbel. E. J. *Statistica of Extreme*, Columbia University Press, New York(1958).
16. Hung W. L. “Weight least-squares estimation of the sharp parameter of the Weibull distribution”, *Quality and Reliability Engineering International*, **17**, 467-469(2001).
17. Rao, S.S. *Reliability based design*, McGraw-Hill, Inc., U.S.A. (1992).
18. Simth, R. L. "Likelihood and modified likelihood estimation for distribution with unknown endpoint", Recently advance in life-testing and reliability, Crc Press. (1995).

本篇論文已被品質學報所接受並刊登於第十卷第 1 期 92 年 6 月 1-14。

作者簡介

陸海林　國立成功大學應用數學系博士，現任職嘉南藥理科技大學資訊管理，擔任副教授一職。中華民國統計學會會員，其研究興趣為可靠度分析、廣泛的線性模式與生物統計。

A weighted non-linear least-square estimation of three-parameter Weibull distribution

Hai-Lin Lu

Department of Management Information Science, Chia Nan University of Pharmacy and Science, Tainan, Taiwan, R.O.C.

The weibull distribution is widely employed a model in reliability studies for distributions of life spans and reaction times. Parameter estimation in the three-parameter Extreme-value distribution often be quite troublesome. In this investigation shows an alternative modified weighted least-squares method for parameters of the three-parameter Extreme-value distribution. A comparison of the novel method with the other methods based on a simulated study. The results of simulation study show that the novel method is more efficient and easier than the other methods in many cases. Three illustrative examples are included.

KEY WORD: Three-parameter Extreme-value distribution, modified weighted least-squares estimator, order statistics, Monte Carlo simulation.