

嘉南藥理科技大學專題研究計畫成果報告

對 Rayleigh 分配位置參數的統計推論及對其參數的聯合估計

計畫類別：☒個別型計畫 ☐整合型計畫

計畫編號：CNAC92-13

執行期間：92 年 1 月 1 日至 92 年 12 月 31 日

計畫主持人：李秀瀧

共同主持人：吳聰慧、許瑞珍

計畫參與人員：

執行單位：醫化系

中華民國 92 年 8 月 21 日

嘉南藥理科技大學 92 年度教師專題研究計畫獎補助申請表

計畫名稱	對 Rayleigh 分配位置參數的統計推論及對其參數的聯合估計						
執行單位	醫化系			執行期間	自民國 92 年 01 月 01 日起 至民國 92 年 12 月 31 日止		
主持人 (子計畫)	李秀瀧	職級	副教授	整合型 總主持		職級	
協同研究	吳聰慧	職級	講師	協同研究	許瑞珍	職級	講師
指導之 研究生	班級： 姓名： (以指導研究生名義申請者請填寫)						
計畫摘要(如不敷使用，請自行繕製、附加)： 本文提供一個對 Rayleigh 分配的位置參數簡單而且精確的檢定及對兩個參數的聯合信賴區域，另外我們也提供檢定所需要的臨界值及模擬研究以比較不同的信賴區間，這個方法不需要造表，計算上及應用上都較容易。							
本計畫 ☒ 主持人為本校專任教師，在校服務年資滿二年以上(55 年 3 月 日到校)。 ☐ 未申請其他機構之經費補助。 ☐ 已獲其他機構核准經費補助，申請本校配合款(請檢附相關資料)。 計畫主持人(簽章)：							
申請補助經費		*複核(技合委員會)			*初核(系、所、中心教評小組)		
新台幣 40000 元							
*核定補助經費							
新台幣 元							
*編號：							

* 欄位申請人勿填寫。

1. 前言

三參數韋伯分配的機率密度函數為

$$g(x; \mu, \alpha, \beta) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{\beta^\alpha}\right)(x - \mu)^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{x - \mu}{\beta}\right)^\alpha\right\} & , \text{ 若 } \mu < x < \infty, \\ 0 & , \text{ 其他。} \end{cases}$$

Rayleigh 分配為韋伯分配在 $\alpha = 2$ 及 $\beta^2 = 2\lambda^2$ 的特殊情形(Mann, 1958), 而且為線性指數分配其故障函數為 $h(t) = \lambda + \mu t$, Rayleigh 分配的故障函數將 μ 以 $\frac{1}{2}\mu$ 取代, 即

$$h(t) = \lambda + \frac{1}{2}\mu t \text{ (Kodlin, 1967; Polovko, 1968)。Kodlin 在 1967 年提出 Rayleigh 分配之後,}$$

就引起廣泛的討論, 物理學家與工程師在討論輻射波及其相關現象時, 經常會用到這個分配。兩參數 Rayleigh 分配的機率密度函數與累積分配函數分別為

$$f(x; \mu, \lambda) = \begin{cases} \frac{(x - \mu)}{\lambda^2} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\lambda^2}\right\} & , \text{ 若 } \mu < x < \infty, \\ 0 & , \text{ 其他。} \end{cases} \quad (1)$$

$$F(x; \mu, \lambda) = 1 - \exp\left\{-\frac{1}{2\lambda^2}(x - \mu)^2\right\} \quad (2)$$

此研究有兩個目的, 首先提供 μ 的信賴區間及 μ 與 λ 的聯合信賴區域, 並且對這些估計式做評估, 其次提供一個對位置參數 μ 的檢定。我們提出一個 Rayleigh 分配參數的統計式, 並利用 Rayleigh 分配與指數分配、順序統計量的關係, 找出此統計式的分配及其性質, 最後附上此統計式的模擬研究。

2. 方法

假設 $Y_1, \dots, Y_n$ 從指數分配尺度參數為 θ 抽出的一個隨機樣本, 而且 $Y_{(1)} < Y_{(2)} < \dots < Y_{(n)}$ 為其相對應的順序統計量, 定義

$$Z_i = 2(n - i + 1) \left(\frac{Y_{(i)}}{\theta} - \frac{Y_{(i-1)}}{\theta} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Z_i 為獨立且相同的 χ^2 分配, 自由度為 2(Balakrishnan and Basu, 1995)。

定義

$$U_m = \frac{m \sum_{i=m+1}^n Z_i}{s \sum_{i=1}^m Z_i}, \quad \text{其中 } 1 \leq m < n, \quad Z_i \text{ 定義如(3)。} \quad (4)$$

每一個 Z_i 皆為自由度 2 的 χ^2 分配, 而且 Z_i 與 Z_j 互相獨立, 當 $i \neq j$ 。因此, $\sum_{i=m+1}^n Z_i$ 與 $\sum_{i=1}^m Z_i$

分別為自由度 $2(n - m)$ 及 $2m$ 的 χ^2 分配, 所以 U_m 為自由度 $2(n - m)$ 及 $2m$ 的 F 分配。

令 $X_1, \dots, X_n$ 為獨立且相同的 Rayleigh 分配，其參數為 μ 與 λ 。定義

$$Y_i = \frac{(X_i - \mu)^2}{2\lambda^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

因此 Y_i 為標準指數分配，平均數為 1，而且 $Y(x)$ 為 x 的遞增函數。令 $X_{(1)} < \dots < X_{(n)}$ 其相

對應的順序統計量，從(5)式可得

$$Y_{(i)} = \frac{(X_{(i)} - \mu)^2}{2\lambda^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

因此 $Y_{(1)} < \dots < Y_{(n)}$ 且 $Y_{(0)} = 0$ 。將(6)式代入(3)式，得到 $\sum_{i=1}^m Z_i$ 與 $\sum_{i=m+1}^n Z_i$ 分別為自由度 $2m$ 及

$2(n-m)$ 的 χ^2 分配，將(4)式改寫為

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{m \sum_{i=m+1}^n (n-i+1)(Y_{(i)} - Y_{(i-1)})}{s \sum_{i=1}^m (n-i+1)(Y_{(i)} - Y_{(i-1)})} \\ &= \frac{m \sum_{i=m+1}^n (n-i+1)[(X_{(i)} - \mu)^2 - (X_{(i-1)} - \mu)^2]}{s \sum_{i=1}^m (n-i+1)[(X_{(i)} - \mu)^2 - (X_{(i-1)} - \mu)^2]} \end{aligned}$$

Lemma 1: 若 $h(\mu) = \left(\frac{a-\mu}{b-\mu}\right)^2$ ，且 $\mu < b < a$ ，則 $h(\mu)$ 為 μ 的嚴格遞增函數。

Lemma 2: 若 $\mu < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ，則 $g_1(\mu) = \frac{\sum_{i=2}^n (a_i - \mu)^2}{(a_1 - \mu)^2}$ 為 μ 的嚴格遞增函數。

Lemma 3: 若 $\mu < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ， $g_m = \frac{\sum_{i=m+1}^n (n-i+1)[(a_i - \mu)^2 - (a_{i-1} - \mu)^2]}{\sum_{i=1}^m (n-i+1)[(a_i - \mu)^2 - (a_{i-1} - \mu)^2]}$ 且 m 為一個

大於 1 的整數，則 $g_m(\mu)$ 為 μ 的嚴格遞增函數。

定理: 令 $X_{(1)} < \dots < X_{(k)}$ 為一個從機率密度函數為 $f(x; \mu, \lambda)$ (如(1)式)與累積分配函數為

$F(x; \mu, \lambda)$ (如(2)式)的 Rayleigh 分配抽出的型二設限樣本，其中 $3 \leq k \leq n$ ，當 $0 < \alpha < 1$ 時，則

(1) μ 的 $(1-\alpha)100\%$ 的信賴區間為

$$C_m(\mu) = \{\mu \mid L' \leq \mu \leq U'\}$$

(2) (μ, λ) 的 $(1-\alpha)100\%$ 聯合信賴區域為

$$R_m(\mu, \lambda) = \{(\mu, \lambda) \mid L'_1 \leq \mu \leq U'_1, L'_2 \leq \lambda \leq U'_2\}$$

其中

$$L' = \varphi(X_{(1)}, \dots, X_{(k)}, F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2(k-m), 2m),$$

$$U' = \varphi(X_{(1)}, \dots, X_{(k)}, F_{\frac{\alpha}{2}}(2(k-m), 2m),$$

$$L'_1 = \varphi(X_{(1)}, \dots, X_{(k)}, F_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-m), 2m),$$

$$U'_1 = \varphi(X_{(1)}, \dots, X_{(k)}, F_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-m), 2m),$$

$$L'_2 = \left\{ \frac{2\eta(X_{(1)}, \dots, X_{(k)}, \hat{\mu})}{\chi^2_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2k)} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$U'_2 = \left\{ \frac{2\eta(X_{(1)}, \dots, X_{(k)}, \hat{\mu})}{\chi^2_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2k)} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$\varphi(X_{(1)}, \dots, X_{(k)}, t)$ 為 $U_m = t$ 中 μ 的一個解, $1 \leq m \leq k-1$, 且

$$\eta(X_{(1)}, \dots, X_{(k)}, \hat{\mu}) = \sum_{i=1}^{k-1} (X_{(i)} - \hat{\mu})^2 + (n-k+1)(X_{(k)} - \hat{\mu})^2.$$

3. 模擬研究

完成模擬研究的步驟如下:

1. 在參數的真值 ($\mu=10; \lambda=1.5$) 之下, 以蒙地卡羅法隨機產生 10000 個樣本數為 20 的隨機樣本。
2. 當 $k=n$ 及不同 m 之下的 U_m , 計算每一個隨機樣本 μ 的 95% 的信賴區間, 上限 $U^{(i)}$, 下限 $L^{(i)}$, 信賴區間的長度 $D^{(i)}$ 及信賴區域的面積為 $S^{(i)}$ 。
3. 完成步驟 2 之後, 我們得到 $(L^{(1)}, U^{(1)}, D^{(1)}, S^{(1)}), \dots, (L^{(10000)}, U^{(10000)}, D^{(10000)}, S^{(10000)})$, 計算上限 $U^{(i)}$ 的平均 U , 下限 $L^{(i)}$ 的平均 L , 信賴區間的長度 $D^{(i)}$ 的平均 D , 信賴區域的面積為 $S^{(i)}$ 平均 S 如下:

$$L = \frac{1}{10000} \sum_{j=1}^{10000} L^{(j)}, \quad U = \frac{1}{10000} \sum_{j=1}^{10000} U^{(j)},$$

$$D = \frac{1}{10000} \sum_{j=1}^{10000} D^{(j)}, \quad S = \frac{1}{10000} \sum_{j=1}^{10000} S^{(j)}.$$

將模擬結果列在表一及表二。

4. 討論

當資料為設限樣本的型態時，在找 Rayleigh 分配參數的估計式將產生一些困難，例如求參數的 MLE，必需設定起始值及重覆的數值計算程序以達收斂的效果。由於 Rayleigh 分配為位置-尺度參數分配，可求最小平方估計量(如最佳線性估計量 BLUE)，然而求 BLUE 時，需對其係數依不同的樣本數 n 與可觀察的個數 k 造表。本文提供一簡單方法來估計參數(也可用到完全資料)，雖然由模擬結果看出當 $m=1$ 的統計量 (U_1, V) 為所提統計量中最佳的，但更多的模擬結果與理論上的證明，應是要考慮的方向，又對不同的模式，在適合的條件下，應用本文所提的統計量，其為最佳的統計量未必為如 $m=1, U_1$ 所架構的統計量，應個別討論，或以理論方法來探討其中最佳者。

